

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

НИКАБАДЗЕ МИХАИЛ УШАНГИЕВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ЧАСТЬ II

МОСКВА  
2007

УДК 593.8

**Никабадзе М.У.**

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. Часть II.** – М.: ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова. 2007. – 93 с.

Рассмотрено несколько методов построения систем линейно независимых изотропных, гиротропных, ортотропных и трансверсально-изотропных тензоров. Сформулированы некоторые утверждения и теоремы. Кроме этого, рассмотрена эффективная параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства, заключающаяся в использовании, в отличие от классических подходов, двух базовых поверхностей и имеющая важное значение при построении теории тонких тел. Введены в рассмотрение свойственные предложенным семействам параметризаций геометрические характеристики. Сформулирована фундаментальная теорема для области тонкого тела при предложенной параметризации.

Библиография: 32 названий.

Р е ц е н з е н т Б.Е. Победря, профессор

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета Московского университета

Р е к о м е н д о в а н о использование в учебном процессе кафедрой механики композитов механико-математического факультета Московского университета

---

Издательство ЦПИ при механико-математическом  
факультете МГУ, 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ.  
Лицензия на издательскую деятельность ИД №04059 от 20.02.2001 г.

---

Отпечатано на типографском оборудовании  
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова  
и Франко-русского центра им. А.М. Ляпунова

© Никабадзе М.У., 2007 г.

## Введение

Тензорное исчисление располагает хорошими фундаментальными монографиями и учебниками, часть из которых приведены в списке литературы [2, 5, 8, 16, 22, 29]. Автору посчастливилось во время аспирантуры и докторантуры слушать замечательные курсы лекций по тензорному анализу, различным разделам механики деформируемого твердого тела (МДТТ) и механике сплошной среды (МСС) (математическая теория пластин и оболочек, основы МДТТ, основы МСС, механика композитов и др.) в тензорном исчислении, читаемые в течении нескольких десятилетий для студентов механико-математического факультета МГУ им.М.В.Ломоносова профессором Б.Е.Победрой. Они оказали неоценимую роль при формировании автора, как специалиста по тензорному исчислению и разным разделам МДТТ. В частности, по теории тонких тел.

Уже много лет автор, работая доцентом по кафедре механики композитов механико-математического факультета МГУ им.М.В.Ломоносова, сам читает следующие спецкурсы для студентов механиков: «Тензорный аппарат механика», «Математическая классическая теория оболочек», «Математическая неклассическая теория оболочек», «Теории тонких тел» и др. Все эти спецкурсы ведутся с использованием тензорного исчисления. При чтении спецкурсов имеются вопросы, которые или недостаточно освещены в имеющейся литературе или изложены в труднодоступных книгах. Поэтому созрела необходимость издания, частично устранившего вышеуказанную проблему. Таким образом, была написана настоящая книга, которая состоит из двух частей.

Часть I состоит из двух глав. В первой главе приведены основные определения из линейной алгебры и функционального анализа. В частности, даны определения полугруппы, группы, кольца и поля, а также модуля и линейного пространства [1, 31]. Сформулирована локальная теорема существования гомеоморфизмов. Введены определения внутреннего  $r$ -произведения и локального скалярного произведения тензоров, ранг которых не меньше  $r$ , а также локальной нормы тензора [2]. Даны определения, сформулированы и доказаны основные теоремы и утверждения, касающиеся линейной зависимости и независимости системы тензоров любого ранга. Кроме этого, приведены определения и доказательства некоторых теорем, относящихся к ортогональной и биортонормальной системам тензоров. Дано определение мультиплективного базиса (мультибазиса) и рассмотрены способы построения базисов модулей с помощью базисов модулей меньших размерностей. В этой связи сформулировано и доказано несколько теорем. Более подробно изучены тензорные модули четного порядка и задачи о нахождении собственных значений и собственных тензоров тензора любого четного ранга, чем в [2]. Даны канонические представления тензора любого четного ранга. Следует заметить, что аналогичную задачу для тензора модулей упругости была рассмотрена польским ученым Я.Рихлевским в 1983-1984 гг., позже, чем она была изучена для тензора любого четного ранга советским ученым И.Н.Векуа.

Во второй главе приведены элементарные сведения о многочленах с тензорными коэффициентами и о действиях над ними. Сформулирована и доказана обобщенная теорема Безу, на основании которой доказана теорема Гамильтона Кэли. Рассмотрено и другое доказательство последней теоремы. Доказано несколько важных теорем, применяющихся при выводе формулы, выражающей присоединенный тензор  $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda)$  для тензорного двучленя  $(2p)$   
 $\lambda \mathbb{E} - \mathbb{A}$  через тензор  $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$  (элементами этого модуля являются комплексные тензоры ранга  $2p$ ) и его инварианты. Далее даны определения минимального многочлена тензора модуля  $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$  и тензора модуля  $\mathbb{C}_p(\Omega)$  (элементами этого модуля являются комплексные тензоры ранга  $p$ ), а также тензора модуля  $\mathbb{C}_p(\Omega)$  относительно заданного

тензора модуля  $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ . Здесь  $\Omega$  – некоторая область  $n$ -мерного евклидова (риманова) пространства. Сформулированы и доказаны некоторые теоремы, касающиеся минимальных многочленов. Кроме того, сформулированы 1-я, 2-я и 3-я теоремы о расщеплении модуля  $\mathbb{C}_p(\Omega)$  на инвариантные подмодули. Особое внимание уделено теоремам о сопряженном, нормальном, эрмитовом и унитарном тензорах модулей  $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$  и  $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$  (элементы этого модуля – действительные тензоры ранга  $2p$ ). Доказаны теоремы о полярном разложении тензоров модулей  $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$  и  $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ , а также теоремы о существовании общей полной ортонормальной системы собственных тензоров для конечного или бесконечного множества попарно коммутирующих нормальных тензоров модулей  $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$  и  $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ . Даны канонические представления вышеупомянутых тензоров.

В конце главы приведены важные с точки зрения практики упражнения, выполнение которых позволит представить законы и уравнения МДТТ во многих случаях в более удобной форме, чем имеющиеся в настоящее время.

Часть II состоит из двух глав. В первой главе рассмотрены различные способы построения линейно независимых изотропных, гиротропных, ортотропных и трансверсально-изотропных тензоров. Сформулированы утверждения и теоремы, позволяющие построить эти тензоры. Построены линейно независимые вышеуказанные тензоры с первого до шестого ранга включительно, когда компоненты тензора не обладают никакой симметрией и в том случае, когда имеются разные виды симметрии.

Во второй главе изложены основы тензорного исчисления при новой параметризации области тонкого тела, заключающейся в использовании нескольких базовых поверхностей для построения теорий тонких тел, а также теорий пластин, оболочек и многослойных конструкций. В конце главы приведены упражнения.

Автор выражает самую глубокую благодарность профессорам Б.Е. Победре и Д.В. Георгиевскому за полезные советы и обсуждения, а также старшего преподавателя А.Р. Улуханян за большую помощь при оформлении рукописи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты №05-01-00397-а, №05-01-00401-а.

# Глава 1

## Построение линейно независимых изотропных, гиротропных, ортотропных и трансверсально-изотропных тензоров

Рассмотрены несколько методов построения систем линейно независимых изотропных, гиротропных, ортотропных и трансверсально-изотропных тензоров. Сформулированы некоторые утверждения и теоремы.

### 1.1 Об изотропных тензорах в $\mathbb{R}^3$

Как известно [11–13, 15, 22],  $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i = g_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j$  — единственный тензор среди изотропных тензоров второго ранга, такой, что любой другой изотропный тензор второго ранга  $\underline{\mathbf{a}}$  с помощью него представляется в виде  $\underline{\mathbf{a}} = a \underline{\mathbf{E}}$ , где  $a$  — скаляр, т.е. произвольный изотропный тензор второго ранга — шаровой тензор.

Тензоры

$$\underline{\mathbf{C}}_{(1)} = \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}_j, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(2)} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(3)} = \mathbf{r}_i \underline{\mathbf{E}} \mathbf{r}^i = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}^j \mathbf{r}^i \quad (1.1.1)$$

представляют собой три линейно независимых (несводимых друг к другу) четвертого ранга. Общее выражение для произвольного изотропного тензора четвертого ранга — их линейная комбинация

$$\underline{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^3 a_k \underline{\mathbf{C}}_{(k)}.$$

Из структуры изотропных тензоров второго и четвертого (1.1.1) ранга, нетрудно усмотреть, что они получаются из соответствующих мультиплекативных базисов путем свертывания (зацепления) попарно индексов у базисных векторов и перебора всевозможных случаев такого зацепления. В качестве примера составим еще все линейно независимые изотропные тензоры шестого ранга. Мультиплекативный базис тензора шестого ранга —  $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l \mathbf{r}_m \mathbf{r}_n$ . Свертывая индексы попарно произвольным образом, получим какой-нибудь изотропный тензор шестого ранга. Например, имеем

$$\mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m = \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{E}}. \quad (1.1.2)$$

Остальные получаются из (1.1.2) перестановкой базисных векторов. Очевидно, переставляя базисные векторы в (1.1.2) в общем случае получим  $6! = 720$  перестановок (изотропных тензоров шестого ранга). Среди этих тензоров лишь пятнадцать линейно независимых (несводимых друг к другу) [13, 22]. Для их получения рассматривать, например следующие тензоры:

$$\mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}_m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}^i \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m \mathbf{r}^i. \quad (1.1.3)$$

Видно, что в тензорах (1.1.3) базисный вектор  $\mathbf{r}^i$  занимает всевозможные места. Теперь оставляя на месте в (1.1.3) векторы  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}^i$  и переставляя остальные, из каждого тензора получим еще по два тензора:

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m \mathbf{r}^k, \\ & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \mathbf{r}_m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m \mathbf{r}^k, \\ & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}^i \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m \mathbf{r}^k, \\ & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_m \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, \\ & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m \mathbf{r}^i, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m \mathbf{r}^i, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^i. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Нетрудно заметить, что используя обозначения изотропных тензоров четвертого ранга и единичного тензора второго ранга, (1.1.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{E}} &= \underline{\mathbf{C}}_{(1)}\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{C}}_{(1)}, \quad \underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{C}}_{(2)}, \quad \underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{C}}_{(3)}, \\ \underline{\mathbf{C}}_{(2)}\underline{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \mathbf{r}_m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \underline{\mathbf{E}} \mathbf{r}^k, \\ \underline{\mathbf{C}}_{(3)}\underline{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m \mathbf{r}^k, \\ \mathbf{r}_i \underline{\mathbf{E}} \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_m \underline{\mathbf{E}} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, \\ \mathbf{r}_i \underline{\mathbf{C}}_{(1)} \mathbf{r}^i, \quad \mathbf{r}_i \underline{\mathbf{C}}_{(2)} \mathbf{r}^i, \quad \mathbf{r}_i \underline{\mathbf{C}}_{(3)} \mathbf{r}^i. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Следует заметить, что девять из тензоров (1.1.4) получаются при скалярном умножении изотропных тензоров четвертого ранга (1.1.1), т.е.

$$\underline{\mathbf{C}}_{ij} = \underline{\mathbf{C}}_{(i)} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{(j)}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.1.6)$$

Остальные шесть тензоров содержатся в качестве слагаемых [13] в тензорном произведении дискриминантного тензора  $\underline{\mathbf{C}} = C_{ijk} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k$  на себя. В самом деле, получаем

$$\underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{C}} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k [\mathbf{r}_i (\mathbf{r}_j \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k \mathbf{r}_j) + \mathbf{r}_j (\mathbf{r}_k \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k) + \mathbf{r}_k (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j \mathbf{r}_i)]. \quad (1.1.7)$$

Следовательно, произвольный тензор шестого ранга  $\underline{\mathbf{C}}$  представляется в виде линейной комбинации тензоров (1.1.6) и тензоров, имеющихся в правой части (1.1.7) в качестве слагаемых, т.е. тензор  $\underline{\mathbf{C}}$  можно представить соотношением

$$\underline{\mathbf{C}} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \underline{\mathbf{C}}_{(i)} \cdot \underline{\mathbf{C}}_{(j)} + \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k [\mathbf{r}_i (b_1 \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k + b_2 \mathbf{r}_k \mathbf{r}_j) + \mathbf{r}_j (b_3 \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i + b_4 \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k) + \mathbf{r}_k (b_5 \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j + b_6 \mathbf{r}_j \mathbf{r}_i)]. \quad (1.1.8)$$

Далее, не останавливаясь на подробном изложении материала, касающегося изотропных тензоров в  $\mathbb{R}^3$ , отметим, что имеют место теоремы.

**Теорема 1.1.1.** Изотропные тензоры нечетного ранга не существуют.

**Теорема 1.1.2.** Изотропный тензор заданного четного ранга в  $\mathbb{R}^3$  может быть построен из соответствующего мультиликативного базиса путем попарного свертывания индексов у базисных векторов.

**Теорема 1.1.3.** Все линейно независимые (несводимые друг к другу) изотропные тензоры заданного четного ранга содержатся в множестве перестановок, которое получается с помощью всевозможных перестановок базисных векторов в каком-либо изотропном тензоре того же ранга, составленном из соответствующего мультиликативного базиса путем попарного свертывания индексов у базисных векторов.

## 1.2 Об ортотропных тензорах в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ . Представления ортотропных тензоров второго и четвертого ранга

Построены линейно независимые ортотропные тензоры второго, четвертого и шестого рангов. Сформулированы некоторые теоремы, позволяющие построить ортотропные тензоры.

Введем определения:

**Определение 1.2.1.** Группа преобразований координат

$$x_{\alpha'} = a_{\alpha} x_{\alpha} \quad <\alpha = 1, 2, 3>,$$

где  $a_{\alpha}$  — следующие наборы чисел ( $a_1, a_2, a_3$ ):

$$(1, 1, 1), \quad (-1, 1, 1), \quad (1, -1, 1), \quad (1, 1, -1), \\ (1, -1, -1), \quad (-1, 1, -1), \quad (-1, -1, 1), \quad (-1, -1, -1),$$

называется группой ортотропии в  $\mathbb{R}^3$ .

**Определение 1.2.2.** Группа преобразований координат

$$x_{\alpha'} = a_{\alpha} x_{\alpha} \quad <\alpha = 1, 2>,$$

где  $a_{\alpha}$  — следующие наборы чисел ( $a_1, a_2$ ):

$$(1, 1), \quad (-1, 1), \quad (1, -1), \quad (-1, -1),$$

называется группой ортотропии в  $\mathbb{R}^2$ .

Заметим, что группу ортотропии в  $\mathbb{R}^3$ , которая является подгруппой полной ортогональной группы преобразований координат  $I$ , можно описать с помощью следующих матриц [22]

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.1) \\ D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а группу ортотропии в  $\mathbb{R}^2$  можно представить в виде следующих матриц:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.2.2)$$

Описание с помощью матриц группы называется ее матричным представлением. Если число матриц при матричном представлении группы конечное, то группа называется точечной. В противном случае группа называется бесконечной или непрерывной.

Следует заметить, что группа ортотропии в  $\mathbb{R}^3$  содержит группу инверсии, группы отражений относительно плоскостей и группы симметрии относительно осей в  $\mathbb{R}^3$ , а группа ортотропии в  $\mathbb{R}^2$  состоит из групп инверсии и отражений относительно осей в  $\mathbb{R}^2$ .

Введем определение ортотропного тензора.

**Определение 1.2.3.** Тензор, группой симметрии которого является группа ортотропии в  $\mathbb{R}^3$  ( $\mathbb{R}^2$ ), называется ортотропным тензором в  $\mathbb{R}^3$  ( $\mathbb{R}^2$ ).

**Определение 1.2.4.** Группа преобразований координат, относительно которой не меняются значения компонент тензора, называется группой симметрии этого тензора.

Далее построим линейно независимые ортотропные тензоры второго, четвертого и шестого рангов. Прежде чем построить эти тензоры, заметим, что число линейно независимых тензоров заданного ранга, группой симметрии которых является точечная группа, вычисляется по формуле [5, 15, 22]:

$$k = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \chi^n(g_m), \quad (1.2.3)$$

где  $N$  — порядок группы (число матриц при матричном представлении группы),  $g_m$ ,  $m = 1, \overline{N}$ , — матрицы группы симметрии,  $\chi(g_m)$  — характер матричного представления группы симметрии,  $n$  — ранг тензоров.

На основании [11–13, 15, 22, 28] и др. можно заключить, что справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.2.1.** *Ортотропные тензоры нечетного ранга не существуют.*

**Теорема 1.2.2.** *Ортотропные тензоры четного ранга  $r = 2k$ , где  $k$  — произвольное конечное натуральное число, можно получить из мультиплекативного базиса тензора того же ранга, образуя из него тензор, состоящий из  $k = r/2$  пар одноименных базисных векторов при условии, что по повторяющимся индексам суммирование не производится.*

Следует заметить, что выбор пар базисных векторов, которым присваивается одинаковое имя, совершенно произведен. В частности, базисные векторы, носящие одинаковое имя, могут оказаться рядом друг с другом или вдали друг от друга. Например, ортотропный тензор шестого ранга можно получить из мультиплекативного базиса  $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l \mathbf{r}_m \mathbf{r}_n$ , если  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}_j$  присвоим одно имя,  $\mathbf{r}_k$  и  $\mathbf{r}_l$  — другое, а  $\mathbf{r}_m$  и  $\mathbf{r}_n$  — третье. В результате получим следующие ортотропные тензоры шестого ранга:

$$\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma, \quad <\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3>. \quad (1.2.4)$$

Здесь  $\mathbf{r}_\alpha$  — ортонормированный базис.

В (1.2.4) одноименные базисные векторы<sup>1</sup> находятся рядом друг с другом. Конечно, можно было рассматривать тензоры, получающиеся из (1.2.4) произвольной перестановкой базисных векторов, например,

$$\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma, \quad <\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3>. \quad (1.2.5)$$

В (1.2.5) одноименные базисные векторы с именами  $\alpha$  и  $\beta$  находятся вдали друг от друга. Очевидно, из (1.2.4) и (1.2.5) следует, что пары одноименных базисных векторов тоже могут иметь одинаковое имя. Таковыми являются, например, тензоры

$$\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha, \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta, \quad <\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3>.$$

Нетрудно заметить, что из какой-либо перестановки ортотропного тензора шестого ранга (например, из (1.2.4)) можно получить путем перестановок все множество ортотропных тензоров шестого ранга.

Очевидно, из множества всех  $6! = 720$  перестановок (1.2.4), содержащего и однаковые ортотропные тензоры, всегда можно выбрать линейно независимые тензоры, число которых меньше общего числа перестановок. Следовательно, все сказанное выше относительно тензора шестого ранга распространяется на тензор любого четного ранга, что можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.2.3.** *Все линейно независимые ортотропные тензоры заданного четного ранга содержатся в множестве перестановок базисных векторов какого-либо ортотропного тензора того же ранга, составленного из соответствующего мультипликативного базиса путем попарного присвоения одинаковых имен его базисным векторам.*

Если построены изотропные тензоры заданного четного ранга, то нетрудно построить из них соответствующие ортотропные тензоры. В этой связи справедлива теорема.

**Теорема 1.2.4.** *Ортотропные тензоры заданного четного ранга можно получить из изотропных тензоров того же ранга путем замены одноименных базисных векторов с индексами из букв латинского алфавита на одноименные соответствующие базисные векторы с индексами из букв греческого алфавита (например,  $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \mathbf{e}^k$  заменяется тензором  $\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta$ ).*

Заметим, что замена одноименных индексов из букв латинского алфавита на одноименные индексы из букв греческого алфавита равносильна запрету суммирования по повторяющимся индексам из букв латинского алфавита. Поэтому теорему (1.2.4) коротко можно сформулировать в виде

*Из изотропных тензоров, представленных с помощью базисных векторов ортонормированного базиса, соответствующие ортотропные тензоры получаются отменой (запретом) суммирования по повторяющимся латинским индексам.*

Имеет место и следующая теорема:

**Теорема 1.2.5.** *Из всех линейно независимых изотропных тензоров заданного четного ранга, составленных с помощью базисных векторов ортонормированного базиса, путем запрета суммирования по повторяющимся индексам, получается множество ортотропных тензоров, среди которых имеются все линейно независимые ортотропные тензоры.*

---

<sup>1</sup> Запись  $<\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3>$  означает, что  $\alpha, \beta, \gamma$  принимают значения 1, 2, 3 и по повторяющимся индексам суммирование не производится

Используя теорему (1.2.5), с помощью изотропных тензоров шестого ранга (1.1.4) построим все ортотропные тензоры шестого ранга. По условию теоремы (1.2.5) после простых размышлений из (1.1.4) получим следующие линейно независимые ортотропные тензоры шестого ранга:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma, \quad \beta \neq \gamma; \\
 & \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta, \quad \beta \neq \gamma; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma, \quad \beta \neq \alpha; \\
 & \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma; \\
 & \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma, \quad \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha; \\
 & \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta, \gamma \neq \alpha; \\
 & \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha; \\
 & \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\alpha, \quad \alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\alpha, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha; \\
 & \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha; \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Нетрудно заметить, что из первого объекта (1.2.6), придавая все указанные значения индексам, получаем 27 тензоров; из второго объекта первой строки, объектов второй строки и первого объекта четвертой строки получаем по 18 тензоров; из объектов третьей строки, второго объекта пятой строки и первого объекта седьмой строки получаем по 12 тензоров, а из остальных шести объектов получаем по 6 тензоров. Простой подсчет показывает, что число линейно независимых ортотропных тензоров шестого ранга равно 183. Следовательно, такое же число получается с помощью формулы, имеющей место в теории характеров матричных представлений групп [5, 15, 22].

Следует заметить, что общее выражение для ортотропного тензора шестого ранга — линейная комбинация 183 ортотропных тензоров шестого ранга (1.2.6). Иными словами ортотропный тензор шестого ранга имеет 183 линейно независимые компоненты. Конечно, если тензор обладает симметрией, то число линейно независимых компонент уменьшается. На рассмотрении симметрий тензора останавливаться не будем.

Ниже, используя изложенный выше материал, рассмотрим подробнее ортотропные тензоры второго и четвертого ранга.

**Ортотропный тензор второго ранга.** Тензорный базис группы ортотропии составляют тензоры [11, 12, 15, 22, 28]

$$\mathbf{\Upsilon}^{(\alpha)} = \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \quad (\gamma_{ij}^{(\alpha)} = \delta_{\alpha i} \delta_{\alpha j}, \quad \mathbf{\Upsilon}^{(\alpha)} = \gamma_{ij}^{(\alpha)} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j), \quad <\alpha = 1, 2, 3>. \tag{1.2.7}$$

Нетрудно заметить, что в силу теоремы 8 из изотропного тензора второго ранга  $\mathbf{E} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i$  получаем те же самые тензоры (1.2.7). Итак, число линейно независимых ортотропных тензоров второго ранга равняется трем. Поэтому произвольный ортотропный тензор второго ранга  $\mathbf{a}$  — линейная комбинация этих тензоров

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha\alpha} \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha = a_{11} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1 + a_{22} \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2 + a_{33} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3. \tag{1.2.8}$$

В компонентах (1.2.8) можно представить в виде

$$a_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha\alpha} \gamma_{ij}^{(\alpha)} = a_{11} \delta_{1i} \delta_{1j} + a_{22} \delta_{2i} \delta_{2j} + a_{33} \delta_{3i} \delta_{3j}. \tag{1.2.9}$$

**Ортотропный тензор четвертого ранга.** В силу теоремы 8 аналогично (1.2.6) все линейно независимые ортотропные тензоры четвертого ранга можно получить из изотропных тензоров (1.1.1). В самом деле, поступая так же, как при получении тензоров (1.2.6), из (1.1.1) будем иметь

$$\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta, \quad <\alpha \neq \beta>; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (1.2.10)$$

Итак, всего имеем 21 ортотропный тензор четвертого ранга. Следовательно, произвольный ортотропный тензор четвертого ранга представляется в виде линейной комбинации тензоров (1.2.10), т.е.

$$\tilde{\mathbf{C}} = C_{ijkl} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 C_{\alpha\alpha\beta\beta} \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta + \sum_{\alpha \neq \beta=1}^3 C_{\alpha\beta\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta + \sum_{\alpha \neq \beta=1}^3 C_{\alpha\beta\beta\alpha} \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha. \quad (1.2.11)$$

Используя [22] обозначения (1.2.7), в компонентах (1.2.11) можно записать в форме

$$C_{ijkl} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 C_{\alpha\alpha\beta\beta} \gamma_{ij}^{(\alpha)} \gamma_{kl}^{(\beta)} + \sum_{\omega \neq \varepsilon=1}^3 C_{\omega\omega\varepsilon\varepsilon} \gamma_{ik}^{(\omega)} \gamma_{jl}^{(\varepsilon)} + \sum_{\eta \neq \vartheta=1}^3 C_{\eta\vartheta\vartheta\eta} \gamma_{il}^{(\eta)} \gamma_{jk}^{(\vartheta)}. \quad (1.2.12)$$

В развернутом виде (1.2.12) имеет представления

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & C_{1111} \gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)} + C_{1122} \gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(2)} + C_{1133} \gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(3)} + \\ & + C_{2211} \gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(1)} + C_{2222} \gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(2)} + C_{2233} \gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(3)} + \\ & + C_{3311} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(1)} + C_{3322} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(2)} + C_{3333} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)} + \\ & + C_{1212} \gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(2)} + C_{1221} \gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jk}^{(2)} + \\ & + C_{2112} \gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(1)} + C_{2121} \gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(1)} + \\ & + C_{1313} \gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(3)} + C_{1331} \gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(3)} + \\ & + C_{3113} \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(1)} + C_{3131} \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(1)} + \\ & + C_{2323} \gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(3)} + C_{2332} \gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(3)} + \\ & + C_{3223} \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(2)} + C_{3232} \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Если компоненты тензора  $\tilde{\mathbf{C}}$  обладают симметрией  $C_{ijkl} = C_{klji}$ , то вместо (1.2.13) после простых вычислений получим

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & C_{1111} \gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)} + C_{2222} \gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(2)} + C_{3333} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)} + \\ & + C_{1122} (\gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(2)} + \gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(1)}) + C_{1133} (\gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(1)}) + \\ & + C_{2233} (\gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(2)}) + C_{1212} \gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(2)} + \\ & + C_{1221} (\gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(2)} + \gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(1)}) + C_{2121} \gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(1)} + C_{1313} \gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(3)} + \\ & + C_{1331} (\gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(1)}) + C_{3131} \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(1)} + C_{2323} \gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(3)} + \\ & + C_{2332} (\gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(2)}) + C_{3232} \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

В правой части (1.2.14) имеем 15 независимых компонент, т.е. в моментной теории ортотропный тензор четвертого ранга имеет 15 независимых компонент.

Теперь, если допустим, что компоненты тензора  $\tilde{\mathbf{C}}$ , кроме указанных выше, обладают еще симметрией  $C_{ijkl} = C_{jikl}$ , то из (1.2.14) получим такое же представление компонент ортотропного тензора, которое имеет место в классической теории упругости [9, 10, 22–24] (см. также [5, 19, 21, 25, 32]).

### 1.3 О гиротропных в $\mathbb{R}^2$ и трансверсально-изотропных в $\mathbb{R}^3$ тензорах

Рассмотрены операция сужения индексов и связанные с ней некоторые вопросы [2]. Построены гиротропные и трансверсально-изотропные тензоры второго, третьего, четвертого, пятого и шестого рангов. Указаны несколько способов построения трансверсально-изотропных тензоров. Сформулированы некоторые теоремы и утверждения.

Вспомним, что строчные латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, а прописные латинские индексы — 1, 2. Греческие индексы пробегают значения в зависимости от обстоятельств. Докажем простую теорему.

**Теорема 1.3.1.** *Пусть имеется трехмерный тензор  $\mathbb{A}$  произвольного ранга с компонентами  $A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$  относительно группы преобразований координат*

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3). \quad (1.3.1)$$

*Если все строчные латинские индексы, принимающие значения 1, 2, 3, заменить соответствующими прописными латинскими индексами, пробегающими значения 1, 2, то получится экстенсив  $\mathbb{A}$  с компонентами  $A_{J_1 J_2 \dots J_q}^{I_1 I_2 \dots I_p}$ , который является тензором того же ранга относительно группы преобразований координат*

$$x^{I'} = x^{I'}(x^1, x^2, x^3), \quad x^{3'} = x^3. \quad (1.3.2)$$

Доказательство. Докажем эту теорему для случая тензора второго ранга. Пусть  $A_{\cdot j}^{i \cdot}$  — смешанные компоненты этого тензора. Очевидно, имеем

$$A_{\cdot j'}^{i \cdot} = D_i^{i'} D_{j'}^j A_{\cdot j}^{i \cdot}, \quad D_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad D_{j'}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}. \quad (1.3.3)$$

Полагая в первом соотношении (1.3.3)  $i' = I$ ,  $j' = J$  и учитывая в силу (1.3.2) равенства  $D_3^{I'} = \frac{\partial x^{I'}}{\partial x^3} = 0$ ,  $D_{J'}^3 = \frac{\partial x^3}{\partial x^{J'}} = 0$ , получаем

$$A_{\cdot j'}^{I \cdot} = D_I^{I'} D_{J'}^J A_{\cdot j}^{I \cdot}, \quad D_I^{I'} = \frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}, \quad D_{J'}^J = \frac{\partial x^J}{\partial x^{J'}}. \quad (1.3.4)$$

Соотношениями (1.3.4) теорема (1.3.1) доказана.

Теперь, прежде чем сформулировать более общую теорему, введем определения.

**Определение 1.3.1.** Замена одного индекса другим у какой-нибудь величины, который пробегает меньшее (большее) множество значений, называется операцией сужения (расширения) индекса.

**Определение 1.3.2.** Замена строчного латинского индекса прописным латинским индексом называется операцией минимального сужения индекса.

**Определение 1.3.3.** Замена строчного латинского индекса тремя называется операцией максимального сужения индекса.

**Определение 1.3.4.** Замена некоторых строчных латинских индексов у компонент произвольного трехмерного тензора (мультиплекативного базиса) прописными латинскими индексами, а остальных индексов тремя называется операцией сужения компонент тензора (мультиплекативного базиса).

**Определение 1.3.5.** Замена некоторых немых строчных латинских индексов в представлении трехмерного тензора немыми прописными латинскими индексами, а остальных немых индексов тремя называется операцией сужения тензора.

**Определение 1.3.6.** Операция, при которой происходит минимальное сужение каждого индекса (немого индекса) у какой-нибудь величины (в представлении пространственного тензора), называется операцией минимального сужения этой величины (пространственного тензора).

**Определение 1.3.7.** Операция, при которой происходит максимальное сужение каждого индекса (немого индекса) у какой-нибудь величины (в представлении пространственного тензора), называется операцией максимального сужения этой величины (пространственного тензора).

**Определение 1.3.8.** Тензор относительно группы преобразований (1.3.2), получающийся с помощью операции минимального сужения пространственного тензора, называется минимальным сужением.

**Определение 1.3.9.** Тензор относительно группы преобразований (1.3.2), получающийся с помощью операции максимального сужения пространственного тензора, называется максимальным сужением.

**Утверждение 1.3.1.** Максимальное сужение компонент пространственного тензора — скаляр относительно группы преобразований (1.3.2).

**Определение 1.3.10.** Число троек среди индексов вследствие операции сужения индексов у какой-нибудь величины (компонент тензора, мультиплекативного базиса) называется порядком сужения этой величины (компонент тензора, мультиплекативного базиса).

**Утверждение 1.3.2.** Порядок сужения тензора равен порядку сужения компонент тензора или мультиплекативного базиса.

Теперь сформулируем обещанную выше теорему.

**Теорема 1.3.2.** Вследствие операции сужения индексов из пространственного тензора получается тензор относительно группы преобразований координат (1.3.2).

Эта более общая теорема доказывается аналогично теореме (1.3.1). Эти теоремы легко обобщить на случай  $n$ -мерного пространства. Здесь обобщениями заниматься не будем.

Нетрудно доказать, что имеет место утверждение.

**Утверждение 1.3.3.** Мультиплекативный базис (мультибазис) любого порядка, составленный из базисных векторов  $r_3$  и  $r^3$  являются инвариантным объектом (тензором) относительно группы преобразований координат (1.3.2). Кроме того, при тензорном умножении какого-либо мультибазиса, составленного из базисных векторов  $r_3$  и  $r^3$ , слева и справа на любой тензор относительно группы преобразований координат (1.3.1) образуются инвариантные объекты (тензоры) относительно группы преобразований координат (1.3.2). Если такие мультибазисы расположить между базисными векторами в представлении какого-либо тензора относительно группы преобразований координат (1.3.1), то получим тензор относительно группы преобразований координат (1.3.2).

Заметим, что операция сужения индексов порядка  $m = r + s$ , где  $r \leq p, s \leq q$ , компонент  $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$  тензора  $\mathbb{A}$  можно осуществить при помощи свертывания индексов у этих компонент с индексами произведения компонент ЕТВР вида

$$g_3^{i_1} g_3^{i_2} \cdots g_3^{i_r} g_{I_{r+1}}^{i_{r+1}} g_{I_{r+2}}^{i_{r+2}} \cdots g_{I_p}^{i_p} g_{j_1}^3 g_{j_2}^3 \cdots g_{j_s}^3 g_{j_{s+1}}^{J_{s+1}} g_{j_{s+2}}^{J_{s+2}} \cdots g_{j_q}^{J_q}.$$

Свертывая индексы  $i_1, i_1, \dots, i_r, j_1, j_1, \dots, j_s$  последнего выражения с различными индексами компонент пространственного тензора, получим, вообще говоря, компоненты различных тензоров относительно группы преобразований координат (1.3.2).

Следует заметить, что сказанное выше справедливо и для более частных случаев групп преобразований координат, чем (1.3.2) при условии, что при всех рассматриваемых группах преобразований координат третья координата остается неизменной ( $x^{3'} = x^3$ ). В частности, вместо (1.3.2) можно рассматривать группу преобразований координат

$$x^{I'} = a_{\cdot J}^{I'} x^J, \quad x^{3'} = x^3, \quad (1.3.5)$$

где  $a_{\cdot J}^{I'}$  — постоянные величины, или группу трансверсальной изотропии

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \\ x_2' = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \\ x_3' = x_3, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases} \quad (1.3.6)$$

которую еще называют группой преобразований  $T_3$ .

### 1.3.1 О двумерных гиротропных тензорах

Введем определение двумерного гиротропного тензора.

**Определение 1.3.11.** Двумерный тензор называется гиротропным, если группа симметрии этого тензора — собственно ортогональная группа (группа вращения) в  $\mathbb{R}^2$ .

Эта группа преобразований координат представляется в виде

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \\ x_2' = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Следует заметить, что число линейно независимых трансверсально-изотропных и двумерных гиротропных тензоров  $n$ -го ранга, компоненты которых не обладают никакой симметрией, вычисляется [5, 15, 22] формулой

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi^n(g_\varphi) d\varphi, \quad (1.3.8)$$

где  $n$  — ранг тензора,  $\chi^n(g_\varphi)$  — характер матричного представления рассматриваемой группы преобразований,  $g_\varphi$  — матрица группы преобразований.

Заметим, что числа линейно независимых трансверсально-изотропных и двумерных гиротропных тензоров  $n$ -го ранга совпадают с числами линейно независимых компонент этих тензоров соответственно.

Далее рассмотрим различные способы составления (построения) линейно независимых двумерных и трансверсально-изотропных тензоров и построим эти тензоры до шестого ранга включительно.

В силу формулы (1.3.8), в которой  $g_\varphi$  — матрица группы преобразований (1.3.7), легко доказать, что имеет место теорема.

**Теорема 1.3.3.** *Двумерные гиротропные тензоры нечетных рангов не существуют.*

На основании той же формулы нетрудно показать, что число линейно независимых двумерных гиротропных тензоров нулевого ранга (скаляра) равно 1. Любой другой двумерный гиротропный тензор определяется с точностью до постоянного множителя. Аналогично можно доказать, что число линейно независимых двумерных гиротропных тензоров равно 2. В самом деле, учитывая, что для группы преобразований (1.3.7) характер матричного представления  $\chi(g_\varphi) = 2 \cos \varphi$ , из (1.3.8) получим

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 2.$$

Нетрудно доказать, что линейно независимыми двумерными гиротропными тензорами второго ранга являются тензоры:  $\mathbf{I} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}^I$  — двумерный единичный тензор второго ранга, который в то же время — двумерный изотропный тензор второго ранга и  $\mathbf{C} = C_{IJ} \mathbf{r}^I \mathbf{r}^J$  — двумерный дискриминантный тензор (тензор Леви-Чивиты) второго ранга. Следовательно, общее выражение двумерного гиротропного тензора второго ранга, компоненты которого не обладают никакой симметрией, — линейная комбинация этих тензоров. Теперь рассмотрим двумерные гиротропные тензоры четвертого ранга. В этом случае число линейно независимых тензоров равно 6. Действительно, имеем

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 \cos \varphi)^4 d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(3 + 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi) d\varphi = 6.$$

Аналогично вычисляется число линейно независимых двумерных гиротропных тензоров шестого ранга. Оно равно 20. В самом деле, находим

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 \cos \varphi)^6 d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(10 + 15 \cos 2\varphi + 6 \cos 4\varphi + \cos 6\varphi) d\varphi = 20.$$

Можно вычислить число линейно независимых двумерных гиротропных тензоров более высокого ранга.

Заметим, что двумерные гиротропные тензоры в то же время являются трансверсально-изотропными тензорами и в силу того, что будут рассмотрены ниже, здесь на их построении останавливаться не будем.

### 1.3.2 О трансверсально-изотропных тензорах

Введем определение трансверсально-изотропного тензора.

**Определение 1.3.12.** Тензор называется трансверсально-изотропным или монотропным, если группа симметрии этого тензора — группа трансверсальной изотропии (1.3.6).

В рассматриваемом случае число линейно независимых тензоров  $n$ -го ранга находится по формуле (1.3.8), где теперь  $\chi(g_\varphi) = 1 + 2 \cos \varphi$ , что следует из (1.3.6).

Осуществляя простые выкладки, легко доказать, что число линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров: а) равно 1 для множества тензоров нулевого ранга; б) равно 1 для множества тензоров первого ранга; в) равно 3 для множества тензоров второго ранга; г) равно 7 для множества тензоров третьего ранга; д) равно 19 для множества тензоров четвертого ранга; е) равно 51 для множества тензоров пятого ранга; з) равно 141 для множества тензоров шестого ранга.

Далее рассмотрим способы построения трансверсально-изотропных тензоров и построим линейно независимые тензоры до шестого ранга включительно.

Известно [22], что тензорный базис группы трансверсальной изотропии составляют тензоры

$$\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_I = \underline{\gamma}^1 + \underline{\gamma}^2, \quad \underline{\epsilon} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \quad (1.3.9)$$

или тензоры

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i, \quad \underline{\epsilon} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3, \quad (1.3.10)$$

где  $\mathbf{r}_i$  — единичный базисный вектор. Другими словами тензоры (1.3.9) и (1.3.10) называются образующими тензорами группы трансверсальной изотропии.

Очевидно, с помощью этих тензоров, группируя их подходящим образом и перебирая всевозможные случаи, можно составить множество всех линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров заданного ранга. Это — один из различных способов построения этих тензоров. Назовем его методом группировки и перебора.

Нетрудно заметить, что трансверсально-изотропный тензор нулевого ранга — скаляр, а любой другой скаляр определяется с точностью до постоянного множителя. Аналогично легко показать, что трансверсально-изотропный тензор первого ранга —  $\mathbf{r}_3$ , а общее выражение для трансверсально-изотропного тензора первого ранга имеет вид  $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{r}_3$ , где  $\lambda$  — некоторое число.

Так как число линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров второго ранга равняется 3 и два тензора  $\underline{\mathbf{I}}$  и  $\underline{\epsilon}$  — линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры второго ранга, то третий тензор второго ранга должен быть составлен с помощью  $\mathbf{r}_3$ . Очевидно, таким тензором будет  $\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3$ .

Таким образом, линейно независимыми трансверсально-изотропными тензорами второго ранга являются тензоры

$$\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_I, \quad \underline{\epsilon} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \underline{\gamma}^3 = \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3. \quad (1.3.11)$$

Общий вид трансверсально-изотропного тензора второго ранга  $\underline{\mathbf{a}}$ , компоненты которого не обладают никакой симметрией, — линейная комбинация тензоров (1.3.11), т.е.

$$\underline{\mathbf{a}} = a \underline{\mathbf{I}} + b \underline{\epsilon} + c \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3. \quad (1.3.12)$$

Если  $\mathbf{a}$  — симметричный тензор ( $\mathbf{a} = \mathbf{a}^T$ ), то  $b = 0$  и из (1.3.12) получим следующее представление

$$\underline{\mathbf{a}} = a \underline{\mathbf{I}} + c \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \quad \text{при} \quad \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}^T. \quad (1.3.13)$$

Нетрудно доказать, что имеют места следующие утверждения:

**Утверждение 1.3.4.** Для любого изотропного или трансверсально-изотропного тензора  $\mathbb{A}$  тензоры

$$\epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbb{A}\mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_I\mathbb{A}\mathbf{r}_I, \quad \mathbf{r}_3\mathbb{A}\mathbf{r}_3$$

являются трансверсально-изотропными тензорами.

**Утверждение 1.3.5.** Изотропные тензоры в то же время являются трансверсально-изотропными тензорами.

**Утверждение 1.3.6.** Тензоры

$$\mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_I\mathbf{r}_J, \quad \epsilon_{KL}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_I\mathbf{r}_L, \quad \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K, \quad \epsilon_{IJ}\epsilon_{KL}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_J\mathbf{r}_L$$

являются трансверсально-изотропными тензорами.

Нетрудно заметить, что с помощью тензоров (1.3.9) или (1.3.10), группируя их и перебирая всевозможные случаи, а также учитывая утверждения (1.3.4)–(1.3.6), можно составить множество всех линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров заданного ранга. Это один из различных способов построения этих тензоров. Назовем его методом группировки и перебора. С помощью этого метода, используя тензоры (1.3.9) или (1.3.11) и  $\mathbf{r}_3$  (группируя их и учитывая утверждение (1.3.4)), нетрудно построить семь линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров. Они имеют вид

$$\mathbf{I}\mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3\mathbf{I}, \quad \mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_I, \quad \underline{\epsilon}\mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3\underline{\epsilon}, \quad \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3\mathbf{r}_3\mathbf{r}_3 = \underline{\gamma}\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3\underline{\gamma}. \quad (1.3.14)$$

Трансверсально-изотропный тензор третьего ранга, компоненты которого не обладают никакой симметрией, является линейной комбинацией тензоров (1.3.14).

Легко показать, что три из тензоров (1.3.14) содержатся в представлении пространственного гиротропного тензора  $\underline{\epsilon}$  (тензор третьего ранга)

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3\underline{\epsilon} - \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J.$$

Итак, пространственный гиротропный тензор — специальная линейная комбинация трех из семи линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров третьего ранга.

Нетрудно построить и линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры четвертого ранга. Эти тензоры можно составить методом группировки и перебора тензоров (1.3.11) и с помощью утверждений (1.3.4)–(1.3.6). В результате получим следующие тензоры:

$$\begin{aligned} & \underline{\mathbf{II}}, \quad \mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_I\mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_I\underline{\mathbf{I}}\mathbf{r}_I, \quad \underline{\epsilon}\epsilon, \quad \epsilon_{KL}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_I\mathbf{r}_L, \quad \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K, \quad \epsilon_{IJ}\epsilon_{KL}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_J\mathbf{r}_L, \\ & \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\underline{\epsilon}\mathbf{r}_J, \quad \underline{\mathbf{I}}\epsilon, \quad \underline{\epsilon}\mathbf{I}, \quad \mathbf{r}_I\underline{\epsilon}\mathbf{r}_I, \quad \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\underline{\mathbf{I}}\mathbf{r}_J, \quad \underline{\gamma}\underline{\gamma}^3, \quad \underline{\gamma}^3\mathbf{I}, \quad \underline{\epsilon}\underline{\gamma}^3, \quad \underline{\gamma}^3\underline{\epsilon}, \quad \mathbf{r}_I\underline{\gamma}^3\mathbf{r}_I, \quad \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\underline{\gamma}^3\mathbf{r}_J, \\ & \underline{\gamma}^3\underline{\gamma}^3, \quad \mathbf{r}_3\underline{\mathbf{I}}\mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3\mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_I, \quad \mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_I\mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3\underline{\epsilon}\mathbf{r}_3, \quad \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_3\mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J, \quad \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J\mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Итак, всего построено 25 трансверсально-изотропных тензоров четвертого ранга. Однако не все они линейно независимы. Как известно, число последних равняется 19, т.е. среди тензоров (1.3.15) имеются шесть лишних. Нетрудно доказать, что тензоры, которые содержат  $\mathbf{r}_3$  (их число равно 13) линейно независимы. Из оставшихся 12 двумерных тензоров надо выбрать шесть линейно независимых, которые, очевидно, вместе с остальными

13 тензорами создадут линейно независимую систему. Введем для двумерных тензоров следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{C}}_{(1)} &= \mathbf{I}\mathbf{I}, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(2)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(3)} = \mathbf{r}_I \mathbf{I} \mathbf{r}_I, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(4)} = \mathbf{I} \boldsymbol{\epsilon}, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(5)} = \epsilon_{KL} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_I \mathbf{r}_L, \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{(6)} &= \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{I} \mathbf{r}_J, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_{(1)} = \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_{(2)} = \epsilon_{IJ} \epsilon_{KL} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J \mathbf{r}_L, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_{(3)} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{r}_J, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_{(4)} = \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I}, \\ \widetilde{\mathbf{a}}_{(5)} &= \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_{(6)} = \mathbf{r}_I \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{r}_I.\end{aligned}\quad (1.3.16)$$

Нетрудно доказать, что между тензорами (1.3.16) имеются следующие связи:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{a}}_{(1)} &= \widetilde{\mathbf{C}}_{(2)} - \widetilde{\mathbf{C}}_{(3)}, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_{(2)} = \widetilde{\mathbf{C}}_{(1)} - \widetilde{\mathbf{C}}_{(3)}, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_{(3)} = \widetilde{\mathbf{C}}_{(1)} - \widetilde{\mathbf{C}}_{(2)}, \\ \widetilde{\mathbf{a}}_{(4)} &= \widetilde{\mathbf{C}}_{(6)} - \widetilde{\mathbf{C}}_{(5)}, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_{(5)} = \widetilde{\mathbf{C}}_{(6)} - \widetilde{\mathbf{C}}_{(4)}, \quad \widetilde{\mathbf{a}}_{(6)} = \widetilde{\mathbf{C}}_{(5)} - \widetilde{\mathbf{C}}_{(4)}.\end{aligned}\quad (1.3.17)$$

Таким образом, шестью соотношениями (1.3.17) между собой связаны 12 тензоров (1.3.16). Отсюда можно заключить, что в качестве линейно независимых можно выбрать шесть любых линейно независимых тензоров из множества 12 тензоров (1.3.16). В частности, например в качестве линейно независимых можно выбрать первые шесть тензоров из (1.3.16) или последние шесть.

Следует заметить, что тензоры в то же время являются двумерными гиротропными тензорами четвертого ранга. Так как в качестве линейно независимых двумерных гиротропных (трансверсально-изотропных) можно рассматривать, например тензоры

$$\widetilde{\mathbf{C}}_{(1)} = \mathbf{I}\mathbf{I}, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(2)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(3)} = \mathbf{r}_I \mathbf{I} \mathbf{r}_I, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(4)} = \mathbf{I} \boldsymbol{\epsilon}, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(5)} = \epsilon_{KL} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_I \mathbf{r}_L, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(6)} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{I} \mathbf{r}_J, \quad (1.3.18)$$

то двумерный гиротропный (трансверсально-изотропный) тензор четвертого ранга  $\widetilde{\mathbf{C}}$ , компоненты которого не обладают никакой симметрией, будет являться линейной комбинацией этих тензоров, т.е.

$$\widetilde{\mathbf{C}} = C_{IJKL} \mathbf{r}^I \mathbf{r}^J \mathbf{r}^K \mathbf{r}^L = \sum_{k=1}^6 C_k \widetilde{\mathbf{C}}_{(k)}, \quad (1.3.19)$$

где  $C_k$ ,  $k = \overline{1, 6}$  — некоторые, отличные от нуля, постоянные. Заметим, что первые три тензора из (1.3.18) представляют собой двумерные изотропные тензоры четвертого ранга, которые, конечно, являются минимальными сужениями соответствующих пространственных изотропных тензоров четвертого ранга. Поэтому для них сохранены те же самые обозначения, которые имели пространственные тензоры. Если компоненты тензора  $\widetilde{\mathbf{C}}$  обладают симметрией  $C_{IJKL} = C_{KLIJ}$ , то  $C_4 = C_5 = C_6 = 0$  (равенство нулю этих постоянных будет доказано ниже) и в этом случае вместо (1.3.19) будем иметь

$$\widetilde{\mathbf{C}} = C_{IJKL} \mathbf{r}^I \mathbf{r}^J \mathbf{r}^K \mathbf{r}^L = \sum_{k=1}^3 C_k \widetilde{\mathbf{C}}_{(k)}. \quad (1.3.20)$$

Заметим, что (1.3.20) является представлением двумерного изотропного (гиротропного) тензора четвертого ранга, компоненты которого обладают симметрией  $C_{IJKL} = C_{KLIJ}$ . Видно, что он имеет три независимых компоненты.

Теперь вернемся к рассмотрению пространственного случая. Для тензоров, которые содержат  $\mathbf{r}_3$ , введем обозначения

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{C}}_{(7)} &= \mathbf{I} \boldsymbol{\gamma}^3, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(8)} = \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\gamma}^3, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(9)} = \boldsymbol{\gamma}^3 \mathbf{I}, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(10)} = \boldsymbol{\gamma}^3 \boldsymbol{\epsilon}, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(11)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3, \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{(12)} &= \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(13)} = \mathbf{r}_I \boldsymbol{\gamma}^3 \mathbf{r}_I, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(14)} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \boldsymbol{\gamma}^3 \mathbf{r}_J, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(15)} = \mathbf{r}_3 \mathbf{I} \mathbf{r}_3, \\ \widetilde{\mathbf{C}}_{(16)} &= \mathbf{r}_3 \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{r}_3, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(17)} = \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(18)} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \quad \widetilde{\mathbf{C}}_{(19)} = \boldsymbol{\gamma}^3 \boldsymbol{\gamma}^3.\end{aligned}\quad (1.3.21)$$

Следовательно, тензоры (1.3.18) и (1.3.21) представляют собой все линейно независимые пространственные трансверсально-изотропные тензоры четвертого ранга. Поэтому пространственный трансверсально-изотропный тензор четвертого ранга, компоненты которого не обладают никакой симметрией, имеет 19 независимых компонент и является линейной комбинацией тензоров (1.3.18) и (1.3.21), т.е.

$$\underset{\approx}{\mathbf{C}} = C_{ijkl} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k \mathbf{r}^l = \sum_{k=1}^{19} C_k \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(k)}, \quad (1.3.22)$$

где  $C_k$ ,  $k = \overline{1, 19}$  — некоторые, отличные от нуля, постоянные.

Представим (1.3.22) в компонентах:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & C_1 I_{ij} I_{kl} + C_2 I_{ik} I_{jl} + C_3 I_{il} I_{jk} + C_4 I_{ij} \epsilon_{kl} + C_5 I_{ik} \epsilon_{jl} + \\ & + C_6 \epsilon_{il} I_{jk} + C_7 I_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + C_8 \epsilon_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + C_9 \gamma_{ij}^{(3)} I_{kl} + C_{10} \gamma_{ij}^{(3)} \epsilon_{kl} + \\ & + C_{11} I_{ik} \gamma_{jl}^{(3)} + C_{12} \epsilon_{ik} \gamma_{jl}^{(3)} + C_{13} I_{il} \gamma_{jk}^{(3)} + C_{14} \epsilon_{il} \gamma_{jk}^{(3)} + C_{15} \gamma_{il}^{(3)} I_{jk} + \\ & + C_{16} \gamma_{il}^{(3)} \epsilon_{jk} + C_{17} \gamma_{ik}^{(3)} I_{jl} + C_{18} \gamma_{ik}^{(3)} \epsilon_{jl} + C_{19} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)}, \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

где  $I_{ij} = \delta_{Mi} \delta_{Mj}$ ,  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{MN} \delta_{Mi} \delta_{Nj} = -\epsilon_{ji}$ .

На основании (1.3.23) легко усмотреть, что отличными от нуля являются следующие компоненты:

$$\begin{aligned} C_{IJKL} &= C_1 \delta_{IJ} \delta_{KL} + C_2 \delta_{IK} \delta_{JL} + C_3 \delta_{IL} \delta_{JK} + C_4 \delta_{IJ} \epsilon_{KL} + C_5 \delta_{IK} \epsilon_{JL} + C_6 \epsilon_{IL} \delta_{JK}, \\ C_{IJ33} &= C_7 \delta_{IJ} + C_8 \epsilon_{IJ}, \quad C_{33KL} = C_9 \delta_{KL} + C_{10} \epsilon_{KL}, \quad C_{I3K3} = C_{11} \delta_{IK} + C_{12} \epsilon_{IK}, \\ C_{I33L} &= C_{13} \delta_{IL} + C_{14} \epsilon_{IL}, \quad C_{3JK3} = C_{15} \delta_{JK} + C_{16} \epsilon_{JK}, \quad C_{3J3L} = C_{17} \delta_{JL} + C_{18} \epsilon_{JL}, \\ C_{3333} &= C_{19}. \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

С помощью (1.3.24) простым подсчетом приходим к тому, что трансверсально-изотропный тензор четвертого ранга, компоненты которого не обладают никакой симметрией, имеет 41 отличную от нуля компоненту, среди которых число независимых компонент равно 19. Из первого соотношения (1.3.24) легко получаем

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = C_1 + C_2 + C_3, \quad C_{1112} = -C_{2221} = C_4 + C_5 + C_6, \\ C_{1122} &= C_{2211} = C_1, \quad C_{1121} = -C_{2212} = -C_4, \\ C_{1212} &= C_{2121} = C_2, \quad C_{1211} = -C_{2122} = -C_5, \\ C_{1221} &= C_{2112} = C_3, \quad C_{2111} = -C_{1222} = -C_6. \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

Отсюда видно, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = C_{1122} + C_{1212} + C_{1221} = C_{2211} + C_{2121} + C_{2112}, \\ C_{1112} &= -C_{2221} = -(C_{1121} + C_{1211} + C_{2111}) = C_{2212} + C_{2122} + C_{1222}. \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

Из остальных соотношений (1.3.24) находим

$$\begin{aligned} C_{1133} &= C_{2233} = C_7, \quad C_{1233} = -C_{2133} = C_8, \\ C_{3311} &= C_{3322} = C_9, \quad C_{3312} = -C_{3321} = C_{10}, \\ C_{1313} &= C_{2323} = C_{11}, \quad C_{1323} = -C_{2313} = C_{12}, \\ C_{1331} &= C_{2332} = C_{13}, \quad C_{1332} = -C_{2331} = C_{14}, \\ C_{3113} &= C_{3223} = C_{15}, \quad C_{3123} = -C_{3213} = C_{16}, \\ C_{3131} &= C_{3232} = C_{17}, \quad C_{3132} = -C_{3231} = C_{18}, \quad C_{3333} = C_{19}. \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

На основании (1.3.25) и (1.3.27) компоненты  $C_{ijkl}$  тензора  $\mathbf{\tilde{C}}$  представим в матричном виде. Будем иметь

$$(C) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1121} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & -C_{1121} & -C_{1112} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3311} & C_{3333} & C_{3312} & -C_{3312} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{1222} & -C_{1211} & -C_{1233} & C_{1221} & C_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & C_{1331} & C_{1323} & C_{1332} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3113} & C_{3131} & C_{3123} & C_{3132} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{1323} & -C_{1332} & C_{1313} & C_{1331} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{3123} & -C_{3132} & C_{3113} & C_{3131} \end{pmatrix} \quad (1.3.28)$$

Теперь допустим, что компоненты  $C_{ijkl}$  обладают симметрией  $C_{ijkl} = C_{klji}$ . Тогда, меняя местами пар индексов  $IJ$  и  $KL$  в первом соотношении (1.3.24) и приравняв правые части полученного соотношения и первого соотношения (1.3.24), получим

$$C_4(\delta_{IJ}\epsilon_{KL} - \epsilon_{IJ}\delta_{KL}) + C_6(\epsilon_{IL}\delta_{JK} - \delta_{IL}\epsilon_{JK}) = 0.$$

Так как это соотношение выполняется при любых значениях  $I, J, K, L$ , из простых вычислений находим  $C_4 = 0$ ,  $C_6 = 0$ . С учетом этого и вторых равенств второй и третьей строк (1.3.25) и второго соотношения (1.3.26) можно доказать, что  $C_5 = 0$ .

Тогда из первого соотношения (1.3.24) получим соотношение

$$C_{IJKL} = C_1\delta_{IJ}\delta_{KL} + C_2\delta_{IK}\delta_{JL} + C_3\delta_{IL}\delta_{JK},$$

которое, конечно, является представлением (1.3.20) в компонентах, а из остальных соотношений находим

$$C_7 = C_9, \quad C_8 = C_{10}, \quad C_{12} = 0, \quad C_{13} = C_{15}, \quad C_{14} = -C_{16}, \quad C_{18} = 0. \quad (1.3.29)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} a_k &\equiv C_k, \quad a_4 \equiv C_7 = C_9, \quad a_5 \equiv C_8 = C_{10}, \quad a_6 \equiv C_{11}, \\ a_7 &\equiv C_{13} = C_{15}, \quad a_8 \equiv C_{14} = -C_{16}, \quad a_9 \equiv C_{17}, \quad a_{10} \equiv C_{19} \end{aligned}$$

и учитывая (1.3.29), соотношения (1.3.23) можно представить в виде

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = a_1 I_{ij} I_{kl} + a_2 I_{ik} I_{jl} + a_3 I_{il} I_{jk} + a_4 (I_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} I_{kl}) + a_5 (\epsilon_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} \epsilon_{kl}) + \\ + a_6 I_{ik} \gamma_{jl}^{(3)} + a_7 (I_{il} \gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)} I_{jk}) + a_8 (\epsilon_{il} \gamma_{jk}^{(3)} - \gamma_{il}^{(3)} \epsilon_{jk}) + a_9 \gamma_{ik}^{(3)} I_{jl} + a_{10} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)}. \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

Отсюда или из (1.3.24) имеем

$$\begin{aligned} C_{IJKL} = C_{KLIL} &= a_1 \delta_{IJ} \delta_{KL} + a_2 \delta_{IK} \delta_{JL} + a_3 \delta_{IL} \delta_{JK}, \quad C_{IJ33} = C_{33IJ} = a_4 \delta_{IJ} + a_5 \epsilon_{IJ}, \\ C_{I3K3} &= a_6 \delta_{IK}, \quad C_{I33L} = C_{3LI3} = a_7 \delta_{IL} + a_8 \epsilon_{IL}, \quad C_{3J3L} = a_9 \delta_{JL}, \quad C_{3333} = a_{10}. \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

Нетрудно заметить, что из (1.3.26) остается соотношение

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{1122} + C_{1212} + C_{1221} = C_{2211} + C_{2121} + C_{2112}. \quad (1.3.32)$$

Таким образом, если компоненты тензора  $\tilde{\mathbf{C}}$  симметричны относительно первой и последней пар индексов, то тензор имеет 10 независимых компонент. В рассматриваемом случае матрица (1.3.28) получит вид

$$(C) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & C_{3312} - C_{3312} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{3312} & C_{1212} & C_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{3312} & C_{1221} & C_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & C_{1331} & 0 & C_{1332} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1331} & C_{3131} - C_{1332} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{1332} & C_{1313} & C_{1331} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1332} & 0 & C_{1331} & C_{3131} \end{pmatrix}, \quad (1.3.33)$$

где в силу (1.3.32) имеем

$$C_{1111} = C_{1122} + C_{1212} + C_{1221}. \quad (1.3.34)$$

Видно, что в матрице (1.3.33) компонент отличны от нуля, из которых независимыми являются 10.

Далее, если допустить, что компоненты тензора  $\tilde{\mathbf{C}}$ , кроме симметрии относительно первой и последней пар индексов, обладают еще симметрией относительно, например последних двух индексов, т.е., если  $C_{ijkl} = C_{klji} = C_{ijlk}$ , то из (1.3.31) находим

$$a_2 = a_3, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = a_7 = a_9, \quad a_8 = 0. \quad (1.3.35)$$

На основании (1.3.35) заключаем, что в рассматриваемом случае тензор  $\tilde{\mathbf{C}}$  имеет пять независимых компонент. При этом симметрия относительно первых двух индексов компонент следует из уже имеющихся симметрий. Вводя обозначения

$$\Lambda_1 = a_1, \quad \Lambda_2 = a_2, \quad \Lambda_3 = a_4, \quad \Lambda_4 = a_{10}, \quad \Lambda_5 = a_6,$$

(1.3.30) можно представить в виде

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = C_{klji} = C_{ijlk} = & \Lambda_1 I_{ij} I_{kl} + \Lambda_2 (I_{ik} I_{jl} + I_{il} I_{jk}) + \Lambda_3 (I_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} I_{kl}) + \\ & + \Lambda_4 \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)} + \Lambda_5 (I_{ik} \gamma_{jl}^{(3)} + I_{il} \gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)} I_{jk} + \gamma_{ik}^{(3)} I_{jl}). \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

Отсюда или из (1.3.31) получаем

$$C_{IJKL} = \Lambda_1 \delta_{IJ} \delta_{KL} + \Lambda_2 (\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK}), \quad C_{IJ33} = \Lambda_3 \delta_{IJ}, \quad C_{3333} = \Lambda_4, \quad C_{I3K3} = \Lambda_5 \delta_{IK}.$$

Кроме того, из (1.3.32) имеем  $C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2$ . Заметим, что (1.3.36) совпадает с представлением этих компонент, которое приведено в [9, 10, 22–24] (см. также [5, 19, 21, 32]).

Аналогично методом группировки и перебора можно построить линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры любого ранга, в частности, и тензоры пятого и шестого рангов. Однако ниже построим линейно независимые тензоры пятого и шестого рангов иным путем, который назовем методом свертки (свертывания) и перебора.

Из структур тензоров (1.3.9), (1.3.11), (1.3.14), (1.3.18) и (1.3.22) видно, что их еще можно построить из соответствующих мультиплекативных базисов (мультибазисов), состоящих из них с помощью сужения индексов тех мультибазисов (не из всех мультибазисов, полученных сужением индексов, можно построить рассматриваемые тензоры), на основании которых путем свертывания индексов с индексами двумерных символов Кронекера и Леви-Чивиты, можно построить искомые тензоры. Следует заметить, что трансверсально-изотропные тензоры четного (нечетного) ранга можно построить из мультибазисов, которые получаются из соответствующих мультибазисов с помощью четных (нечетных) порядков сужения.

Сказанное выше можно оформить в виде теоремы.

**Теорема 1.3.4.** Для построения трансверсально-изотропных тензоров четного (нечетного) ранга достаточно из соответствующего мультибазиса с помощью четных (нечетных) порядков сужения составить всевозможные мультибазисы и индексы полученных путем операции сужения мультибазисов свернуть с индексами двумерных символов Кронекера и Леви-Чивиты, перебирая всевозможные случаи. При этом в множестве тензоров заданного ранга, построенном выше методом, содержатся все линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры.

Ниже, используя эту теорему, построим линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры пятого и шестого рангов. Сперва построим тензоры пятого ранга. В этой связи с помощью нечетных порядков (первого, третьего, пятого) сужения мультибазиса  $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l \mathbf{r}_m$  переберем всевозможные базисы. Будем иметь

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L \mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L \mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L \mathbf{r}_L; \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \\ & \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \\ & \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3; \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

Итак, всего получили 16 мультибазисов, с помощью которых, свертывая их с двумерными символами Кронекера  $\delta_{MN}$  и Леви-Чивиты  $\epsilon_{ST}$  и перебирая всевозможные случаи свертки, получим множество трансверсально-изотропных тензоров пятого ранга, среди которых будут линейно независимые тензоры. Видно, что число мультибазисов в (1.3.37), порядок сужения которых равен 1, равняется  $C_5^1 = 5$ ; число мультибазисов, порядок сужения которых равен 3, равно  $C_5^3 = 10$  и наконец, в (1.3.37) имеется один  $C_5^5 = 1$  мультибазис (максимальное сужение пространственного мультибазиса), который состоит из одних  $\mathbf{r}_3$ .

Теперь к каждому мультибазису, содержащему один раз  $\mathbf{r}_3$  (первые пять из (1.3.37)) применим свертывания, аналогичные для составления тензоров (1.3.18). Тогда из каждого мультибазиса получим по шесть линейно независимых тензоров. При этом в представлении каждого из полученных тензоров  $\mathbf{r}_3$  займет вполне определенное место. Например, из первого мультибазиса указанным выше способом получим тензоры, которые можно получить из (1.3.18), если справа им приписать  $\mathbf{r}_3$ . Аналогично из пятого мультибазиса получаются тензоры, которые можно получить, если тензорам (1.3.18) слева приписать  $\mathbf{r}_3$ . Из второго мультибазиса получаются тензоры, которые можно получить, если на четвертое место (слева направо) среди базисных векторов каждого тензора (1.3.18) поместить  $\mathbf{r}_3$ . Аналогично из третьего и четвертого мультибазисов можно построить тензоры, которые получим, поместив  $\mathbf{r}_3$  на третью и второе места соответственно среди базисных векторов каждого тензора (1.3.18). Таким образом, из первых пяти мультибазисов (1.3.37) всего находим 30 линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров пятого ранга.

Нетрудно заметить, что из каждого мультибазиса, содержащего три раза  $\mathbf{r}_3$ , можно построить по два трансверсально-изотропных тензора, свертывая каждый из них первый раз с двумерным символом Кронекера, а другой раз с двумерным символом Леви-Чивиты. Так как число мультибазисов, содержащих три раза  $\mathbf{r}_3$ , равно 10, то всего из них получим 20 линейно независимых тензоров пятого ранга. Последний мультибазис из (1.3.37), который есть максимальное сужение, является трансверсально-изотропным тензором пятого ранга.

Таким образом, из (1.3.37) методом свертки и перебора построили систему линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров пятого ранга, состоящую из 51 тензора, как и требуется. С целью сокращения письма выписывать их не будем. Заметим только, что доказать линейную независимость построенных тензоров не представляет никакой сложности, поэтому на этом останавливаться не будем.

Разумеется, трансверсально-изотропный тензор пятого ранга, компоненты которого не обладают никакой симметрией, является линейной комбинацией 51 тензора и, следовательно, имеет 51 линейно независимую компоненту. Рассмотрение различных случаев симметрии не представляет труда, поэтому и на этом останавливаться не будем.

Теперь построим линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры шестого ранга. Прежде всего заметим, что из мультибазисов, которые получаются вследствие нечетного порядка сужения трехмерного мультибазиса шестого порядка  $\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j\mathbf{r}_k\mathbf{r}_l\mathbf{r}_m\mathbf{r}_n$ , нельзя составить искомые тензоры. Действительно, для составления какого-нибудь трансверсально-изотропного тензора из мультибазиса, полученного сужением соответствующего пространственного мультибазиса, надо учитывать, что он должен содержать четное число базисных векторов с прописными латинскими индексами, так как только в таком случае можно свертывать его с двумерными символами Кронекера и Леви-Чивиты (символы имеют по два индекса). При этом мультибазис, в котором число прописных латинских индексов равняется нулю, т.е. все индексы в нем равны 3, в любом случае будет один (он называется максимальным сужением и является трансверсально-изотропным тензором; в этом случае четное число равно нулю).

В силу теоремы (1.3.4) в рассматриваемом случае посредством четных порядков (нулевого, второго, четвертого и шестого) сужения пространственного мультибазиса  $\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j\mathbf{r}_k\mathbf{r}_l\mathbf{r}_m\mathbf{r}_n$  надо составить всевозможные мультибазисы. Сперва составим такие, которые не содержат  $\mathbf{r}_3$  (такой мультибазис, называемый минимальным сужением пространственного мультибазиса, будет  $C_6^0 = 1$ ) и содержат  $\mathbf{r}_3$  два раза (число таких мультибазисов будет  $C_6^2 = 15$ ). Будем иметь

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K\mathbf{r}_L\mathbf{r}_M\mathbf{r}_N, \quad \mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K\mathbf{r}_L\mathbf{r}_3\mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K\mathbf{r}_3\mathbf{r}_L\mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_3\mathbf{r}_K\mathbf{r}_L\mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K\mathbf{r}_L\mathbf{r}_3, \\ & \mathbf{r}_3\mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K\mathbf{r}_L\mathbf{r}_3; \quad \mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_3\mathbf{r}_3\mathbf{r}_K\mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J\mathbf{r}_3\mathbf{r}_K\mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_3\mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_3\mathbf{r}_K\mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_3\mathbf{r}_K\mathbf{r}_3\mathbf{r}_L; \quad (1.3.38) \\ & \mathbf{r}_3\mathbf{r}_3\mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K\mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_3\mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K\mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_3\mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K\mathbf{r}_3\mathbf{r}_L; \quad \mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K\mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K\mathbf{r}_3\mathbf{r}_L, \\ & \mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K\mathbf{r}_3\mathbf{r}_3\mathbf{r}_L. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно составить мультибазисы, которые содержат  $\mathbf{r}_3$  четыре раза. Действительно, такие мультибазисы (их число будет равняться  $C_6^4 = 15$ ) можно получить из мультибазисов, содержащих  $\mathbf{r}_3$  два раза, заменяя в них прописные латинские индексы на 3, а индексы, равные 3, на прописные латинские индексы. Следовательно, мультибазис, который содержит шесть раз  $\mathbf{r}_3$  и называется максимальным сужением пространственного

мультибазиса, будет  $C_6^6 = 1$ . В результате получим следующие мультибазисы:

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J; \\ & \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3; \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \\ & \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3; \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3; \\ & \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

Теперь сначала из первого мультибазиса (1.3.38) составим все линейно независимые двумерные трансверсально-изотропные (гиротропные) тензоры шестого ранга, число которых, как было показано выше, равно 20. Следует заметить, что множество этих тензоров содержит все линейно независимые двумерные изотропные тензоры шестого ранга, получающиеся из пространственных изотропных тензоров (1.1.5) вследствие операции минимального сужения. Следовательно, имеет место утверждение.

**Утверждение 1.3.7.** Двумерные изотропные тензоры являются минимальными сужениями соответствующих трехмерных изотропных тензоров. При этом минимальные сужения линейно независимых трехмерных изотропных тензоров представляют собой линейно независимые двумерные изотропные тензоры.

В силу этого утверждения из тензоров (1.1.5) посредством операции минимального сужения получим все 15 двумерных линейно независимых изотропных тензоров шестого ранга. Вводя обозначения для тензоров шестого ранга через  $\mathbb{C}_{(\alpha)}$  и сохраняя использованные выше обозначения для двумерного ЕТВР и тензоров четвертого рангов (1.3.18), имеем следующие линейно независимые двумерные изотропные тензоры шестого ранга:

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}_{(1)} = \mathbf{I} \mathbf{I} \mathbf{I} = \mathbf{\tilde{C}}_{(1)} \mathbf{I} = \mathbf{I} \mathbf{\tilde{C}}_{(1)}, \quad \mathbb{C}_{(2)} = \mathbf{I} \mathbf{\tilde{C}}_{(2)}, \quad \mathbb{C}_{(3)} = \mathbf{I} \mathbf{\tilde{C}}_{(3)}, \quad \mathbb{C}_{(4)} = \mathbf{\tilde{C}}_{(2)} \mathbf{I}, \\ & \mathbb{C}_{(5)} = \mathbf{\tilde{C}}_{(3)} \mathbf{I}, \quad \mathbb{C}_{(6)} = \mathbf{r}_I \mathbf{\tilde{C}}_{(1)} \mathbf{r}_I, \quad \mathbb{C}_{(7)} = \mathbf{r}_I \mathbf{\tilde{C}}_{(2)} \mathbf{r}_I, \quad \mathbb{C}_{(8)} = \mathbf{r}_I \mathbf{\tilde{C}}_{(3)} \mathbf{r}_I, \quad \mathbb{C}_{(9)} = \mathbf{r}_I \mathbf{I} \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \\ & \mathbb{C}_{(10)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{I} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbb{C}_{(11)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{I} \mathbf{r}_J, \quad \mathbb{C}_{(12)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K, \quad \mathbb{C}_{(13)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K, \\ & \mathbb{C}_{(14)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J, \quad \mathbb{C}_{(15)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K. \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

Так как тензоры (1.3.40) в то же время являются двумерными трансверсально-изотропными тензорами шестого ранга, то в виде (1.3.40) имеем 15 линейно независимых двумерных трансверсально-изотропных (гиротропных) тензоров шестого ранга. До полной системы линейно независимых тензоров не хватает 5 тензоров. Очевидно, в качестве их можно взять любые отличные от (1.3.40) пять линейно независимых двумерных трансверсально-изотропных тензоров шестого ранга, которые вместе с тензорами (1.3.40) будут составлять линейно независимую систему из 20 тензоров. С целью построения недостающих тензоров рассмотрим тензоры

$$\begin{aligned} & \mathbf{I} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_I, \quad \mathbf{\tilde{C}}_{(1)} = \mathbf{I} \mathbf{I} \mathbf{I}, \quad \mathbf{\tilde{C}}_{(2)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{\tilde{C}}_{(3)} = \mathbf{r}_I \mathbf{I} \mathbf{r}_I, \\ & \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{\tilde{C}}_{(4)} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{I} \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{\tilde{C}}_{(5)} = \mathbf{I} \boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{\tilde{C}}_{(6)} = \epsilon_{KL} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_I \mathbf{r}_L. \end{aligned} \quad (1.3.41)$$

Следует заметить, что с помощью тензоров (1.3.41) можно составить все линейно независимые двумерные трансверсально-изотропные тензоры шестого ранга. Для этого достаточно тензоры  $\mathbf{I}$  и  $\boldsymbol{\epsilon}$  группировать друг с другом и с остальными тензорами, а также, используя утверждение (1.3.4), составить тензоры шестого ранга. Это еще один способ построения искомых тензоров. Нетрудно заметить, что тензоры

$$\mathbf{\tilde{C}}_{(16)} = \mathbf{r}_I \mathbf{C}_{(4)} \mathbf{r}_I, \quad \mathbf{\tilde{C}}_{(17)} = \mathbf{r}_I \mathbf{\tilde{C}}_{(5)} \mathbf{r}_I, \quad \mathbf{\tilde{C}}_{(18)} = \mathbf{r}_I \mathbf{C}_{(6)} \mathbf{r}_I, \quad \mathbf{\tilde{C}}_{(19)} = \mathbf{I} \mathbf{C}_{(5)}, \quad \mathbf{\tilde{C}}_{(20)} = \mathbf{C}_{(4)} \mathbf{I}, \quad (1.3.42)$$

образованные указанным выше методом с помощью первого и последних трех тензоров (1.3.41) и которые, конечно, еще можно получить методом свертки и перебора, являются линейно независимыми. Кроме того, они и тензоры (1.3.40) вместе составляют линейно независимую систему. Таким образом, в качестве линейно независимых двумерных трансверсально-изотропных тензоров шестого ранга могут быть рассмотрены тензоры (1.3.41) и (1.3.42), число которых равно 20.

Теперь заметим, что из каждого мультибазиса (1.3.38), начиная со второго, используя те свертывания, которые были бы применены при составлении тензоров (1.3.18) методом свертки и перебора (каждый из них содержит по четыре базисных вектора с прописными латинскими индексами), получим по 6 линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров шестого ранга. Так как число таких базисов равно 15, то всего получим  $6 \times 15 = 90$  тензоров. Они будут линейно независимыми. Теперь выпишем некоторые из этих тензоров. Например, для того, чтобы из второго мультибазиса (1.3.38) получить искомые тензоры, достаточно тензорам (1.3.18) справа приписать  $\gamma^{(3)} = \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3$ . Продолжая нумерацию тензоров шестого ранга, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{(21)} &= \mathbb{C}_{(1)} \gamma^{(3)}, & \mathbb{C}_{(22)} &= \mathbb{C}_{(2)} \gamma^{(3)}, & \mathbb{C}_{(23)} &= \mathbb{C}_{(3)} \gamma^{(3)}, \\ \mathbb{C}_{(24)} &= \mathbb{C}_{(4)} \gamma^{(3)}, & \mathbb{C}_{(25)} &= \mathbb{C}_{(5)} \gamma^{(3)}, & \mathbb{C}_{(26)} &= \mathbb{C}_{(6)} \gamma^{(3)}, \end{aligned} \quad (1.3.43)$$

Нетрудно заметить, что из 11-го мультибазиса (1.3.38) можно получить те тензоры, полученные из (1.3.43), меняя местами тензоры  $\mathbb{C}_{(\alpha)}$ ,  $\alpha = \overline{1, 6}$  и  $\gamma^{(3)}$ . Выпишем еще тензоры, которые получим из третьего мультибазиса (1.3.38). Будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{(27)} &= \mathbb{I} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3, & \mathbb{C}_{(28)} &= \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3, & \mathbb{C}_{(29)} &= \mathbf{r}_I \mathbb{I} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3, \\ \mathbb{C}_{(30)} &= \mathbb{I} \epsilon_{KL} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, & \mathbb{C}_{(31)} &= \epsilon_{KL} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, & \mathbb{C}_{(26)} &= \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbb{I} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

Следует заметить, что из этого мультибазиса аналогично мести последним (1.3.16) можно составить следующие тензоры:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{(1)} &= \epsilon \epsilon_{KL} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, & \mathbb{A}_{(2)} &= \epsilon_{IJ} \epsilon_{KL} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, & \mathbb{A}_{(3)} &= \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \epsilon \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3, \\ \mathbb{A}_{(4)} &= \epsilon \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3, & \mathbb{A}_{(5)} &= \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3, & \mathbb{A}_{(6)} &= \mathbf{r}_I \epsilon \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3, \end{aligned}$$

для которых аналогичные (1.3.17) соотношения представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{(1)} &= \mathbb{C}_{(28)} - \mathbb{C}_{(29)}, & \mathbb{A}_{(2)} &= \mathbb{C}_{(27)} - \mathbb{C}_{(29)}, & \mathbb{A}_{(3)} &= \mathbb{C}_{(27)} - \mathbb{C}_{(28)}, \\ \mathbb{A}_{(4)} &= \mathbb{C}_{(32)} - \mathbb{C}_{(31)}, & \mathbb{A}_{(5)} &= \mathbb{C}_{(32)} - \mathbb{C}_{(30)}, & \mathbb{A}_{(6)} &= \mathbb{C}_{(31)} - \mathbb{C}_{(30)}, \end{aligned}$$

т.е. они выражаются через тензоры (1.3.44). Совершенно аналогично можно составить искомые тензоры из остальных мультибазисов (1.3.38). Поэтому с целью сокращения письма на их построении останавливаются не будем.

Далее из каждого мультибазиса (1.3.39), кроме последнего, свертывая их с двумерными символами Кронекера и Леви-Чивиты, можно построить по два линейно независимых трансверсально-изотропных тензора шестого ранга. Очевидно, из 15 мультибазисов всего получим  $2 \times 15 = 30$  тензоров. Последний мультибазис (максимальное сужение) представляет собой трансверсально-изотропный тензор шестого ранга. Простой подсчет показывает, что всего составлено  $20 + 90 + 30 + 1 = 141$  трансверсально-изотропный тензор шестого ранга. Система этих тензоров будет линейно независимой.

Таким образом, трансверсально-изотропный тензор шестого ранга, компоненты которого не обладают никакой симметрией, является линейной комбинацией системы линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров шестого ранга, состоящей из 141 тензора, т.е. такой тензор имеет 141 линейно независимую компоненту. Следовательно, если компоненты тензора обладают какой-нибудь симметрией, то число независимых компонент такого тензора меньше 141. Из изложенного выше видно, что не представляет большого труда приведенными выше методами при необходимости построить линейно независимые изотропные, ортотропные и трансверсально-изотропные тензоры произвольного ранга  $n > 6$ .

## Глава 2

# Новая параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства

В этой главе рассмотрена эффективная параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ , заключающаяся в использовании, в отличие от классических подходов, двух базовых поверхностей, называемых условно внутренней и внешней базовыми поверхностями. Введены в рассмотрение свойственные предложенным семействам параметризаций геометрические характеристики.

В частности, рассмотрены различные семейства базисов (реперов) и порожденные ими соответствующие семейства параметризаций. Введены в рассмотрение компоненты переноса единичного тензора второго ранга (ЕТВР), а также основные компоненты ЕТВР, посредством которых выражены сопровождающие рассмотренные в работе семейства параметризаций различные геометрические объекты. С помощью компонент переноса ЕТВР осуществлена связь между различными семействами параметризаций.

Даны представления ЕТВР, единичного тензора четвертого ранга (ЕГЧР), а также изотропных тензоров четвертого ранга при рассматриваемых семействах параметризаций области тонкого тела трехмерного евклидова пространства. Сформулирована фундаментальная теорема для области тонкого тела при ее новой параметризации.

### 2.1 Параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства на основе двух базовых поверхностей

Рассмотрим область трехмерного евклидова пространства, ограниченную двумя лицевыми поверхностями  $S^{(-)}$  и  $S^{(+)}$  и боковой поверхностью  $\sum^{(-)}$  (рис.1).

В дальнейшем условно лицевую поверхность  $S^{(-)}$  будем называть внутренней базовой поверхностью, а лицевую поверхность  $S^{(+)}$  – внешней базовой поверхностью (рис.1). Кроме того, поверхность  $S^{(-)}$  часто будем называть основной базовой поверхностью, так как при параметризации рассматриваемой области трехмерного евклидова пространства на ней

вводятся гауссовые координаты, т.е. сначала осуществляется параметризация поверхности  $S^{(-)}$ , а потом, принимая  $S^{(-)}$  в качестве основной базовой поверхности (базы), производится параметризация области любой эквидистантной от  $S^{(-)}$  поверхности, обозначаемой через  $S^{(+)}$  (рис. 1).

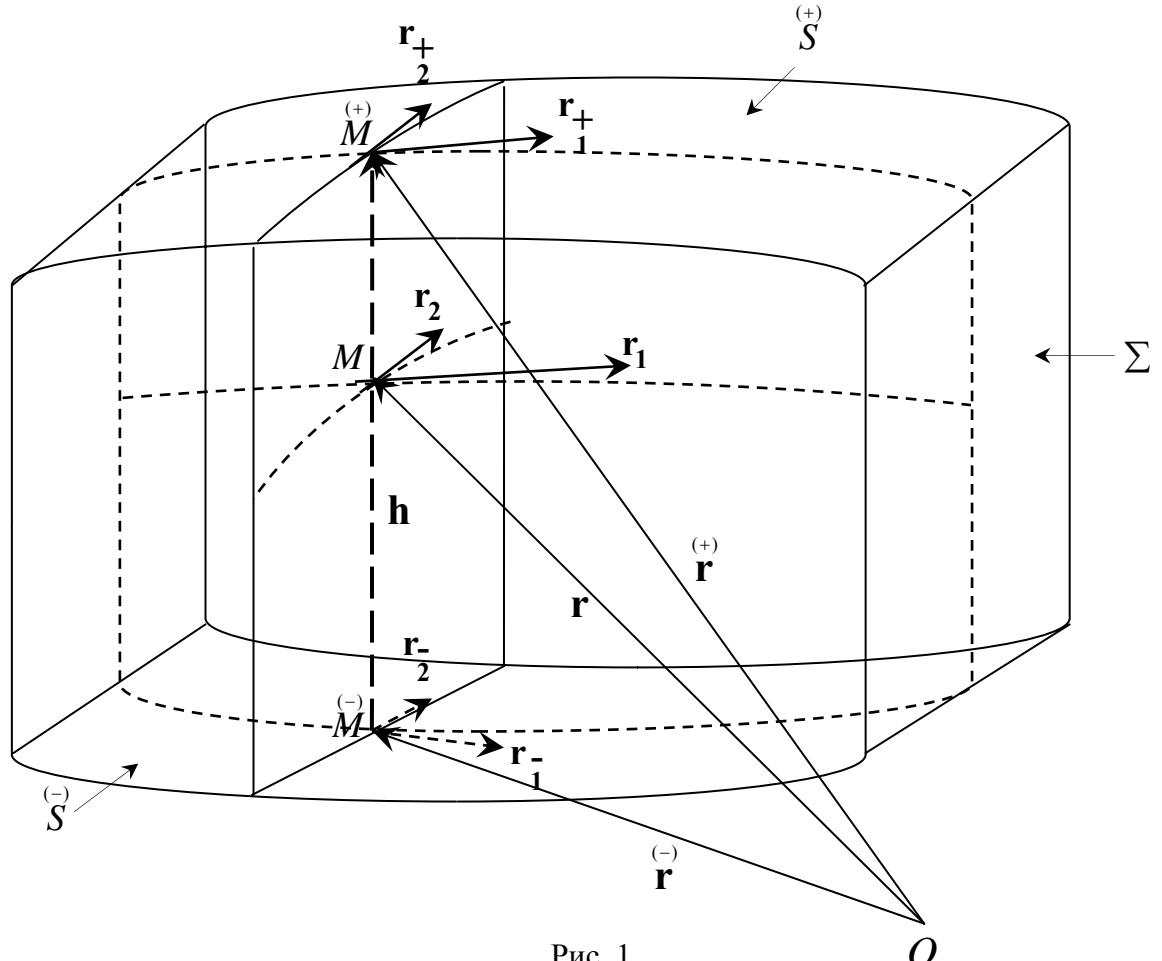


Рис. 1.

Введем определения:

**Определение 2.1.1.** Область трехмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ , один или два размера которой значительно меньше остальных, называется тонкой областью.

**Определение 2.1.2.** Тонкая область, имеющая боковую поверхность  $\Sigma$ , называется незамкнутой тонкой областью, в противном случае — замкнутой.

**Определение 2.1.3.** Трехмерное тело, занимающее тонкую область, называется тонким телом.

В силу определения (2.1.3) в дальнейшем, говоря о тонкой области, будем подразумевать тонкое тело и, наоборот, говоря о тонком теле, будем подразумевать тонкую область (область тонкого тела).

**Определение 2.1.4.** Область тонкого тела называется ограниченной, если существует шар конечного радиуса, который содержит рассматриваемую область тонкого тела.

**Определение 2.1.5.** Любая регулярная поверхность называется базовой поверхностью или просто базой.

Следует заметить, что при дальнейшем изложении рассматривается тонкое тело, один размер которого меньше остальных. В качестве  $\overset{(-)}{S}$  и  $\overset{(+)}{S}$  используются регулярные поверхности [20] и, кроме того, в случае ограниченной незамкнутой области тонкого тела боковая поверхность  $\sum$  считается линейчатой поверхностью.

### 2.1.1 Векторное параметрическое уравнение области тонкого тела

Радиус-вектор произвольной точки области тонкого тела представляется в виде (рис.1)

$$\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) + x^3 \mathbf{h}(x^1, x^2) = (1 - x^3) \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) + x^3 \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) \quad \forall x^3 \in [0, 1],$$

или коротко

$$\mathbf{r}(x', x^3) = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x') + x^3 \mathbf{h}(x') = (1 - x^3) \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x') + x^3 \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x'), \quad x' = (x^1, x^2), \quad \forall x^3 \in [0, 1], \quad (2.1.1)$$

где векторные соотношения

$$\overset{(-)}{\mathbf{r}} = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x'), \quad \overset{(+)}{\mathbf{r}} = \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x'), \quad x' = (x^1, x^2) \quad (2.1.2)$$

являются векторными параметрическими уравнениями базовых поверхностей  $\overset{(-)}{S}$  и  $\overset{(+)}{S}$  соответственно,  $x' = (x^1, x^2)$  — произвольная точка на  $\overset{(-)}{S}$ , т.е.  $x^1$  и  $x^2$  — криволинейные (гауссовые) координаты<sup>1</sup> на внутренней базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$ .

Вектор

$$\mathbf{h}(x') = \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x') - \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x'), \quad x' = (x^1, x^2), \quad (2.1.3)$$

топологически отображающий внутреннюю базовую поверхность  $\overset{(-)}{S}$  на внешнюю  $\overset{(+)}{S}$ , вообще говоря, не является перпендикулярным к базовым поверхностям.

Нетрудно увидеть, что (2.1.1) при  $\forall x'$  и  $x^3 = 0$  определяет внутреннюю базовую поверхность  $\overset{(-)}{S}$ , при  $\forall x'$  и  $x^3 = 1$  — внешнюю базовую поверхность  $\overset{(+)}{S}$ , а при  $\forall x'$  и  $x^3 = \text{const}$ , где  $x^3 \in (0, 1)$  — эквидистантную от базовых  $\overset{(-)}{S}$  и  $\overset{(+)}{S}$  поверхность  $S$ .

Следовательно, соотношение (2.1.1) не что иное, как векторное параметрическое уравнение области тонкого тела.

Пусть  $M = (x^1, x^2, 0) = x'$  — произвольная точка на внутренней базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$ , т.е.  $M \in \overset{(-)}{S}$ , а  $M = (x', x^3)$  и  $\overset{(+)}{M} = (x', 1)$  — соответствующие ей точки на эквидистантной поверхности  $S$  и внешней базовой поверхности  $\overset{(+)}{S}$  соответственно<sup>2</sup>, т.е.  $M \in S$  и  $\overset{(+)}{M} \in \overset{(+)}{S}$ .

<sup>1</sup> Под  $x'$  раз и навсегда подразумеваем произвольную точку базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$ , имеющую, если противное не будет оговорено, две координаты  $x^1$  и  $x^2$ , т.е. зависимость величин от  $x'$  означает их зависимость от  $x^1$  и  $x^2$ . Поэтому с целью сокращения письма в дальнейшем, выписывая соотношения, в которых величины зависят от  $x'$ , не будем указывать на то, что  $x' = x^1, x^2$ .

<sup>2</sup> Применяются обычные правила тензорного исчисления [2, 13, 22]. В основном сохранены обозначения и соглашения, принятые в ранее опубликованных работах. Прописные и строчные латинские индексы пробегают значения 1,2 и 1,2,3 соответственно. Кроме того, в дальнейшем часто применяются краткие записи, подобные, например,  $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$  или  $\mathbf{r}_{\bar{p}} = g_{\bar{p}}^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}}$ ,  $\sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , где  $\emptyset$  обозначает пустое множество. Первая запись означает: если  $* = -$ , то  $\overset{(-)}{M} \in \overset{(-)}{S}$ ; если,  $* = \emptyset$ , то  $M \in S$ ; если  $* = +$ , то  $\overset{(+)}{M} \in \overset{(+)}{S}$ . Вторая запись означает, что если, например,  $\sim = \emptyset$ ,  $\sim = -$ , то  $\mathbf{r}_p = g_p^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}}$ , если  $\sim = +$ ,  $\sim = -$ , то  $\mathbf{r}_{\bar{p}} = g_{\bar{p}}^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}}$  и т.д. Перебирая все значения, получим все соотношения.

Обозначая через  $Q$  множество точек области тонкого тела трехмерного евклидового пространства  $\mathbb{R}^3$ , нетрудно заметить, что

$$Q = \left\{ (\overset{(-)}{M}, z) \in \mathbb{R}^3 : \forall \overset{(-)}{M} \in \overset{(-)}{S}, \forall z \in [0, h], h = |\mathbf{h}|, z = x^3 h, x^3 \in [0, 1] \right\}.$$

### 2.1.2 Двухмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации поверхности

Для производных по  $x^P$  от соотношений (2.1.1) и (2.1.2) в точках  $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$  введем соответственно обозначения

$$\mathbf{r}_P \equiv \partial_P \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^P}, \quad \mathbf{r}_P^* = \frac{\partial \overset{(*)}{\mathbf{r}}}{\partial x^P}, \quad * \in \{-, +\}. \quad (2.1.4)$$

Пары векторов  $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$  определенные в точках  $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ , следовательно, образуют двумерные ковариантные поверхности базисы, а  $\overset{(*)}{M} \mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^*$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$  – двумерные ковариантные поверхности реперы, порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации рассматриваемых поверхностей. По этим реперам (базисам), как известно [2, 13, 22], можно построить соответствующие им контравариантные реперы  $\overset{(*)}{M} \mathbf{r}^1 \mathbf{r}^2$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$  (базисы  $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ ). Естественно, ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные геометрические характеристики.

Определяя в произвольных точках поверхностей  $\overset{(*)}{S}$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ , реперы (базисы), получим соответствующие семейства реперов (базисов), порождающие в свою очередь соответствующие им семейства параметризаций.

Таким образом, всякое семейство гауссовых параметров на поверхности  $\overset{(-)}{S}$ , порождает соответствующие семейства реперов (базисов) и, следовательно, параметризаций на поверхности  $\overset{(*)}{S}$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

Введем определения:

**Определение 2.1.6.** Множество двумерных ковариантных (контравариантных) реперов  $\overset{(*)}{M} \mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^*$ ,  $(\overset{(*)}{M} \mathbf{r}^1 \mathbf{r}^2)$ , называется  $\overset{(*)}{S}$ -семейством ковариантных (контравариантных) реперов,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.7.** Объединение  $\overset{(*)}{S}$ -семейств ковариантных и контравариантных реперов называется  $\overset{(*)}{S}$ -семейством реперов,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.8.** Множество двумерных ковариантных (контравариантных) базисов  $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$ ,  $(\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2)$ , называется  $\overset{(*)}{S}$ -семейством базисов,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.9.** Объединение  $\overset{(*)}{S}$ -семейств ковариантных и контравариантных базисов называется  $\overset{(*)}{S}$ -семейством базисов,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.10.** Порожденное  $\overset{(*)}{S}$ -семейством реперов множество параметризаций называется  $\overset{(*)}{S}$ -семейством параметризаций,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.11.** Порожденное  $\overset{(*)}{S}$ -семейством базисов множество геометрических характеристик называется  $\overset{(*)}{S}$ -семейством геометрических характеристик,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.12.** Компоненты, имеющие векторы, представленные в  $\overset{(*)}{S}$ -семействе базисов, называются  $\overset{(*)}{S}$ -семейством компонент,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

### 2.1.3 Трехмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации области

Учитывая в первом соотношении (2.1.4) выражение радиус-вектора  $\mathbf{r}$  (2.1.1) и вводя обозначение

$$\mathbf{h}_P \equiv \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x^P} \equiv \partial_P \mathbf{h},$$

получим

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{\bar{P}} + x^3 \mathbf{h}_P = (1 - x^3) \mathbf{r}_{\bar{P}} + x^3 \mathbf{r}_{\bar{P}}^+. \quad (2.1.5)$$

Дифференцируя (2.1.1) по  $x^3$ , получим

$$\mathbf{r}_3 \equiv \partial_3 \mathbf{r} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} = \mathbf{h}(x'), \quad \forall x^3 \in [0, 1]. \quad (2.1.6)$$

На основании (2.1.6) можно принять, что

$$\mathbf{r}_{\bar{3}} = \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_{\bar{3}}^+ \equiv \partial_3 \mathbf{r} = \mathbf{h}(x'), \quad \forall x^3 \in [0, 1]. \quad (2.1.7)$$

Соотношение (2.1.7) дает возможность в точках  $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$ ,  $* \in \{-, +\}$ , определить пространственные ковариантные базисы  $\mathbf{r}_p^*$ ,  $* \in \{-, +\}$ . Таким образом, третий базисный вектор пространственных ковариантных базисов в точках  $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$  — один и тот же вектор  $\mathbf{h}(x')$ .

Ввиду (2.1.7) соотношения (2.1.5) и (2.1.6) можно соединить и представить в виде

$$\mathbf{r}_p(x', x^3) = \mathbf{r}_{\bar{p}}(x') + x^3 \mathbf{h}_p(x') = (1 - x^3) \mathbf{r}_{\bar{p}}(x') + x^3 \mathbf{r}_{\bar{p}}^+(x'). \quad (2.1.8)$$

Тройки векторов  $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \mathbf{r}_3^*$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ , определенные в рассматриваемых точках  $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ , следовательно, образуют трехмерные (пространственные) ковариантные базисы, а  $\overset{(*)}{M} \mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^* \mathbf{r}_3^*$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ , — трехмерные (пространственные) реперы, порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации. По этим реперам (базисам), как известно [2, 13, 22], можно построить соответствующие им контравариантные реперы  $\overset{(*)}{M} \mathbf{r}^1 \mathbf{r}^2 \mathbf{r}^3$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ , (базисы  $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ ). В самом деле, на основании их определения [2, 13, 22] имеем

$$\mathbf{r}^{\tilde{k}} = \frac{1}{2} C^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{p}} \times \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\} \quad (2.1.9)$$

где  $C^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}} = (\mathbf{r}^{\tilde{k}} \times \mathbf{r}^{\tilde{p}}) \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$  — контравариантные компоненты дискриминантных тензоров [2] в рассматриваемых точках  $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$ ,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ , соответственно.

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$g_{\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad g^{\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}^{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad g_{\tilde{q}}^{\tilde{p}} = \mathbf{r}^{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.10)$$

В силу (2.1.8) и (2.1.10), очевидно, получаем

$$\begin{aligned} g_{p\tilde{q}} &= \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}} = (1 - x^3)g_{\tilde{p}\tilde{q}} + x^3g_{\tilde{p}\tilde{q}}, \\ g_p^{\tilde{q}} &= \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}^{\tilde{q}} = (1 - x^3)g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} + x^3g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Нетрудно заметить, что в силу (2.1.10) между базисными векторами имеем следующую связь:

$$\mathbf{r}_{\tilde{p}} = g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{q}} = g_{\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.12)$$

сохраняющую силу при жонглировании индексами.

На основании (2.1.12) нетрудно доказать, что имеют место соотношения

$$g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} g_{\tilde{n}}^{\tilde{q}}, \quad \sim, \sim, * \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.1.13)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Не представляет большого труда получить выражение для  $g_{pq}$ . В самом деле, по (2.1.10) и (2.1.11) имеем

$$\begin{aligned} g_{pq} &= \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_q = g_{p\tilde{n}}^* g_{\tilde{n}}^{\tilde{q}} = (1 - x^3)^2 g_{\tilde{p}\tilde{q}} + x^3(1 - x^3)(g_{\tilde{p}\tilde{q}} + g_{\tilde{p}\tilde{q}}) + (x^3)^2 g_{\tilde{p}\tilde{q}}, \\ g_{\tilde{p}\tilde{q}} &= g_{\tilde{p}\tilde{m}} g_{\tilde{m}}^{\tilde{q}}, \quad * \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Найдем выражения для  $\sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3$ . В силу второго соотношения при  $\sim = \emptyset$ ,  $\sim \in \{-, +\}$  получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\mathbf{r}_I \times \mathbf{r}_J) \cdot \mathbf{r}_3 = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} g_I^{\tilde{K}} g_J^{\tilde{L}} (\mathbf{r}_{\tilde{K}} \times \mathbf{r}_{\tilde{L}}) \cdot \mathbf{r}_3 = \frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{g})} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^{\tilde{K}} g_J^{\tilde{L}} = \\ &= \sqrt{(\tilde{g})} \det(g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}) = \sqrt{(\tilde{g})} \det(g_P^{\tilde{Q}}), \end{aligned}$$

т.е.

$$\sqrt{g} = \sqrt{(\tilde{g})} \det(g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}), \quad \det(g_P^{\tilde{Q}}) = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^{\tilde{K}} g_J^{\tilde{L}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad (2.1.15)$$

где  $\epsilon^{IJ}$ ,  $\epsilon_{KL}$  — символы Леви-Чивиты, а

$$\sqrt{(\tilde{g})} = (\mathbf{r}_{\tilde{1}} \times \mathbf{r}_{\tilde{2}}) \cdot \mathbf{r}_{\tilde{3}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \sqrt{(\tilde{g})} = \sqrt{g} \Big|_{x^3=0}, \quad \sqrt{(\tilde{g})} = \sqrt{g} \Big|_{x^3=1}.$$

Из (2.1.14) в свою очередь имеем

$$(\tilde{g}) \equiv \sqrt{g g^{-1}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^{\tilde{K}} g_J^{\tilde{L}} = \det(g_P^{\tilde{Q}}), \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (2.1.16)$$

Нетрудно заметить, что имеет место более общее соотношение, чем (2.1.15), а именно

$$\sqrt{(\tilde{g})} = \frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{g})} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\tilde{I}}^{\check{K}} g_{\tilde{J}}^{\check{L}} = \sqrt{(\tilde{g})} \det(g_{\tilde{P}}^{\check{Q}}), \quad \check{\sim}, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.17)$$

Из (2.1.16) получаем

$$\det(g_{\tilde{P}}^{\check{Q}}) = \det(g_{\tilde{P}}^{\check{q}}) = \sqrt{(\tilde{g}) (\tilde{g})^{-1}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_{\tilde{I}}^{\check{K}} g_{\tilde{J}}^{\check{L}}, \quad \check{\sim}, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.18)$$

В силу (2.1.18) нетрудно доказать, что,  $\check{\sim}, \sim \in \{-, \emptyset, +\}$

$$\overset{(\sim)}{\vartheta} \equiv \sqrt{(\tilde{g}) (\tilde{g})^{-1}} = \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1}, \quad \overset{(\approx)}{\vartheta} = 1, \quad \check{\sim}, \sim \in \{-, +\}. \quad (2.1.19)$$

Учитывая (2.1.18) и (2.1.19), соотношения (2.1.15) можно представить в более развернутом виде

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\vartheta} &= \sqrt{g (\tilde{g})^{-1}} = (1 - x^3)^2 \overset{(-)}{\vartheta} + x^3 (1 - x^3) \text{tr}(g_{\tilde{I}}^{\check{I}}) + (x^3)^2 \overset{(+)}{\vartheta}, \\ \overset{(+)}{\vartheta} &= \sqrt{g (\tilde{g})^{-1}} = (1 - x^3)^2 \overset{(+)}{\vartheta} + x^3 (1 - x^3) \text{tr}(g_{\tilde{I}}^{\check{I}}) + (x^3)^2 \overset{(+)}{\vartheta}. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Не представляет большого труда найти выражения для  $\mathbf{r}^k$  посредством векторов  $\mathbf{r}_{\tilde{m}}$  или  $\mathbf{r}^{\tilde{m}}$ ,  $\sim \in \{-, +\}$ . В самом деле, учитывая в соотношении (2.1.9) при  $\sim = \emptyset$ , например, первое равенство (2.1.12), получаем

$$\mathbf{r}^k = \frac{1}{2} C^{kpq} \mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_q = \frac{1}{2} C^{kpq} g_p^{\tilde{m}} g_q^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} \times \mathbf{r}_{\tilde{n}} = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_p^{\tilde{m}} g_q^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}^k = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_p^{\tilde{m}} g_q^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad (2.1.21)$$

где  $\epsilon^{kpq}$ ,  $\epsilon_{lmn}$  — символы Леви-Чивита.

Учитывая (2.1.18) и (2.1.19), нетрудно доказать, что имеет место более общее соотношение, чем (2.1.21), а именно

$$\mathbf{r}^{\check{k}} = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_{\check{p}}^{\tilde{m}} g_{\check{q}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{l}}, \quad \check{\sim} \in \{-, \emptyset, +\}, \sim \in \{-, +\}. \quad (2.1.22)$$

В силу (2.1.22) имеем

$$\begin{aligned} g_{\tilde{l}}^{\check{k}} &= \mathbf{r}^{\check{k}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{l}} = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_{\check{p}}^{\tilde{m}} g_{\check{q}}^{\tilde{n}}, \\ g^{\tilde{l}\check{k}} &= \mathbf{r}^{\check{k}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{l}} = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{smn} g_{\check{p}}^{\tilde{m}} g_{\check{q}}^{\tilde{n}} g^{\tilde{s}\tilde{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \check{\sim} \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Из (2.1.23) при  $\check{\sim} = \emptyset$  (или на основании (2.1.20)) получаем

$$\begin{aligned} g_{\tilde{l}}^k &= \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}_{\tilde{l}} = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{lmn} g_p^{\tilde{m}} g_q^{\tilde{n}}, \\ g^{k\tilde{l}} &= \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}^{\tilde{l}} = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{kpq} \epsilon_{smn} g_p^{\tilde{m}} g_q^{\tilde{n}} g^{\tilde{s}\tilde{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Учитывая (2.1.18), нетрудно доказать, что из первых соотношений (2.1.23) и (2.1.24) находим

$$g_{\tilde{K}}^{\check{K}} = \overset{(\sim)}{\vartheta}{}^{-1} g_{\tilde{I}}^{\tilde{I}}, \quad g_{\tilde{K}}^K = \overset{(\sim)}{\vartheta}{}^{-1} g_{\tilde{I}}^{\tilde{I}}, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (2.1.25)$$

Естественно, построенные выше пространственные ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные порожденным порождающими реперами параметризациям геометрические характеристики.

Определяя в каждой в точке поверхностей  $S, * \in \{-, \emptyset, +\}$ , пространственные реперы (базисы), получим соответствующие семейства пространственных реперов (базисов), порождающие в свою очередь соответствующие им семейства параметризаций.

Целесообразно ввести следующие определения:

**Определение 2.1.13.** Множества пространственных ковариантных (контравариантных) реперов  $\overset{(*)}{M}\mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^* \mathbf{r}_3^*$  ( $M\mathbf{r}^1 \mathbf{r}^2 \mathbf{r}^3$ ) называются  $\overset{(*)}{S}_{(g)}$ -семействами ковариантных (контравариантных) реперов,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.14.** Объединение  $\overset{(*)}{S}_{(g)}$ -семейств ковариантных и контравариантных реперов называется  $\overset{(*)}{S}_{(g)}$ -семействами реперов,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.15.** Множество пространственных ковариантных (контравариантных) базисов  $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \mathbf{r}_3^*$  ( $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ ) называется  $\overset{(*)}{S}_{(g)}$ -семейством ковариантных (контравариантных) базисов,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.16.** Объединение  $\overset{(*)}{S}_{(g)}$ -семейств ковариантных и контравариантных базисов называется  $\overset{(*)}{S}_{(g)}$ -семейством базисов,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.17.** Порожденное  $\overset{(*)}{S}_{(g)}$ -семейством реперов множество параметризаций называются  $\overset{(*)}{S}_{(g)}$ -семейством параметризаций,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.18.** Порожденное  $\overset{(*)}{S}_{(g)}$ -семейством базисов множество геометрических характеристик называется  $\overset{(*)}{S}_{(g)}$ -семейством геометрических характеристик,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.19.** Компоненты векторов, представленные в  $\overset{(*)}{S}_{(g)}$ -семействе базисов называются  $\overset{(*)}{S}_{(g)}$ -семейством компонент,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ .

Отметим еще раз, что природа каждого построенного  $\overset{(\sim)}{S}_{(g)}$ -семейства реперов (базисов),  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , такова, что третий базисный вектор  $\mathbf{r}_3 = \mathbf{h}(x^1, x^2)$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ ,

в общем случае не является перпендикуляром к соответствующей поверхности  $\overset{(\sim)}{S}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ . Однако в частном случае он может быть перпендикуляром, а также единичным вектором нормали к поверхности  $\overset{(\sim)}{S}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , обозначаемым через  $\overset{(\sim)}{\mathbf{n}}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

Введем определения:

**Определение 2.1.20.**  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim g)}$ -семейство реперов (базисов) называется нормальным  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim g)}$ -семейством реперов (базисов), если третий базисный вектор  $\mathbf{r}_{(3)} = \mathbf{h}(x^1, x^2)$  перпендикулярен к соответствующей базовой поверхности  $\overset{(\sim)}{S}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.21.**  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim g)}$ -семейство реперов (базисов) называется естественным семейством реперов (базисов), обозначаемым через  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim a)}$ , если третий базисный вектор, обозначаемый через  $\overset{(\sim)}{\mathbf{n}}$ , является единичным вектором нормали к соответствующей базовой поверхности  $\overset{(\sim)}{S}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.22.** Порожденная (естественным) нормальным  $(\overset{(\sim)}{S}_{(\sim a)})$   $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim g)}$ -семейством<sup>3</sup> реперов параметризация называется (естественным) нормальным  $(\overset{(\sim)}{S}_{(\sim a)})$   $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim g)}$ -семейством параметризации,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

Следует заметить, что естественные семейства параметризаций довольно подробно рассмотрены в монографии И.Н.Бекуа [2].

## 2.1.4 Мультиликативные базисы

Для представления при предлагаемой параметризации области тонкого тела тензоров, ранг которых не меньше двух, полезно ввести в рассмотрение мультиликативные базисы<sup>4</sup> [2]. Так как мы в основном будем иметь дело с тензорами, ранг которых не больше четырех, целесообразно ввести мультиликативные базисы, образованные с помощью тензорного умножения двух, трех и четырех базисных векторов из рассмотренного выше различного семейства базисов.

Таким образом, определив  $\overset{(*)}{S}_{(\sim g)}$ -семейство базисов,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ , не представляет никакого труда определить указанные выше мультиликативные базисы. В самом деле, введем следующее

**Определение 2.1.23.** Тензорные произведения базисных векторов из  $\overset{(*)}{S}_{(\sim g)}$ -семейств,  $* \in \{-, \emptyset, +\}$ , обозначаемые

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\tilde{m}\check{n}} &= \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\check{n}}, & \mathbf{R}_{\tilde{m}\check{n}\hat{p}} &= \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\check{n}} \otimes \mathbf{r}_{\hat{p}}, \\ \mathbf{R}_{\tilde{m}\check{n}\hat{p}\check{q}} &= \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\check{n}} \otimes \mathbf{r}_{\hat{p}} \otimes \mathbf{r}_{\check{q}}, & \sim, \curvearrowleft, \vee, \wedge &\in \{-, \emptyset, +\} \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

---

<sup>3</sup> Индексы  $\overset{(\sim)}{g}$  и  $\overset{(\sim)}{a}$  применяются из соображения, что  $\sqrt{\overset{(\sim)}{g}} \equiv (\mathbf{r}_{(1)} \times \mathbf{r}_{(2)}) \cdot \mathbf{r}_{(3)}$  и  $\sqrt{\overset{(\sim)}{a}} \equiv (\mathbf{r}_{(1)} \times \mathbf{r}_{(2)}) \cdot \overset{(\sim)}{\mathbf{n}}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

<sup>4</sup> В монографии [2] они называются мультиликативными базисными тензорами, что по принятой нами терминологии не оправдано.

и получаемые из них жонглированием индексами их образы, называются мультиплекативными базисами.

Следует заметить, что по терминологии, принятой, например, в [22], (2.1.26) можно называть многоточечными базисами трехмерного евклидова пространства. Первый базис (2.1.26) — двухточечный базис, а второй и третий базисы (2.1.26) — трехточечный и четырехточечный базисы соответственно. Следовательно, можно было их называть двухвекторным, трехвекторным и четырехвекторным базисами соответственно.

Из сказанного выше следует, что для представления тензоров  $n$ -го ранга аналогично можно рассмотреть  $n$ -векторный мультиплекативный базис, где  $n \geq 2$  — натуральное число, однако на этом мы останавливаться не будем, а в случае необходимости будем им пользоваться. Подробное изложение, касающееся многоточечных (мультиплекативных) базисов, заинтересованный читатель найдет в монографиях [2, 22].

В качестве примера приведем представление тензоров второго, третьего и четвертого рангов при рассматриваемых параметризациях области тонкого тела трехмерного евклидова пространства. Имеем представления

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P^{\tilde{m}\tilde{n}} \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}} = P^{\tilde{m}\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}_{\tilde{m}\tilde{n}\hat{p}} \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\hat{p}} = \mathbf{C}_{\tilde{m}\tilde{n}\hat{p}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}^{\tilde{n}} \otimes \mathbf{r}^{\hat{p}}, \\ \mathbf{C} &\approx C_{\tilde{m}\tilde{n}\hat{p}\tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\hat{p}\tilde{q}} = \mathbf{C}_{\tilde{m}\tilde{n}\hat{p}\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}^{\tilde{n}} \otimes \mathbf{r}^{\hat{p}} \otimes \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad \sim, \approx, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

конечно, сохраняющие силу при жонглировании индексами.

## 2.1.5 Различные семейства символов Кристоффеля

Для нахождения ковариантных производных от тензоров и их компонент нам понадобятся символы Кристоффеля. Естественно, введенное выше каждое семейство базисов порождает своеобразное ему семейство символов Кристоффеля, для которого следует вводить соответствующее обозначение. В связи с этим введем следующие определения:

**Определение 2.1.24.** Порожденное  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^g$ -семейством базисов множество символов Кристоффеля первого и второго рода, обозначаемые через  $\Gamma_{\tilde{p}q}^{\tilde{n}}$  и  $\Gamma_{\tilde{p}q,\tilde{n}}$  соответственно, называются  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^g$ -семействами символов Кристоффеля первого и второго рода,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.25.** Объединение  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^g$ -семейств символов Кристоффеля первого и второго рода называется  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^g$ -семейством символов Кристоффеля,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

В рассматриваемом случае математические определения символов Кристоффеля первого и второго рода представляются в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{p}q,\tilde{n}} &\equiv \partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}} \equiv \partial_q \partial_p^{(\sim)} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}} \equiv \mathbf{r}_{\tilde{p}q} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \\ \Gamma_{\tilde{p}q}^{\tilde{n}} &\equiv \partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{n}} \equiv \partial_q \partial_p^{(\sim)} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{n}} \equiv \mathbf{r}_{\tilde{p}q} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{n}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

**Определение 2.1.26.** Порожденное  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^a$ -семейством базисов множество символов Кристоффеля первого и второго рода, обозначаемые через  $\bar{\Gamma}_{\tilde{p}q,\tilde{l}}$  и  $\bar{\Gamma}_{\tilde{p}q}^{\tilde{l}}$  соответственно, называются  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^a$ -семейством символов Кристоффеля первого и второго рода,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.27.** Объединение  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^{(a)}$ -семейств символов Кристоффеля первого и второго рода называется  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^{(a)}$ -семейством символов Кристоффеля,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

Математически  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^{(a)}$ -семейства символов Кристоффеля определяются аналогично соотношениям (2.1.28) с учетом того, что  $\mathbf{r}_{\tilde{3}} = \overset{(\sim)}{\mathbf{n}}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

**Определение 2.1.28.** Множество символов Кристоффеля первого (второго) рода  $\bar{\Gamma}_{\tilde{P}Q,\tilde{L}}$  ( $\bar{\Gamma}_{\tilde{P}Q}^{\tilde{L}}$ ) называется  $\overset{(\sim)}{S}$ -семейством символов Кристоффеля первого (второго) рода, а их объединение —  $\overset{(\sim)}{S}$ -семейством символов Кристоффеля,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

Математические определения этих семейств символов Кристоффеля представляются в виде

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{\tilde{P}Q,\tilde{L}} &\equiv \partial_Q \mathbf{r}_{\tilde{P}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{L}} \equiv \partial_Q \partial_P \overset{(\sim)}{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{L}} \equiv \mathbf{r}_{\tilde{P}Q} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{L}}, \quad \mathbf{r}_{\tilde{3}} = \mathbf{r}^{\tilde{3}} = \overset{(\sim)}{\mathbf{n}}, \\ \bar{\Gamma}_{\tilde{P}Q}^{\tilde{L}} &\equiv \partial_Q \mathbf{r}_{\tilde{P}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{L}} \equiv \partial_Q \partial_P \overset{(\sim)}{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{L}} \equiv \mathbf{r}_{\tilde{P}Q} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{L}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}.\end{aligned}\tag{2.1.29}$$

Следует заметить, что вид применяемых индексов, зависит от вида рассматриваемого семейства параметризации. В связи с этим следует различать индексы, применяемые при разных семействах параметризаций.

Введем следующее

**Определение 2.1.29.** Индекс, применяемый при  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^{(g)}$ -семействе параметризации, называется  $\overset{(\sim)}{g}$ -индексом, а индекс, применяемый при  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^{(a)}$ -семействе параметризации —  $\overset{(\sim)}{a}$ -индексом,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

## 2.1.6 Деривационные формулы для мультиплекативных базисов

Нетрудно вывести деривационные формулы для мультиплекативных базисов, зная аналогичные формулы для базисных векторов. В связи с этим сначала выпишем деривационные формулы для  $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)}^{(g)}$ -семейства базисных векторов, которые в силу (2.1.28) примут вид

$$\mathbf{r}_{\tilde{p}q} \equiv \partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} = \Gamma_{\tilde{p}q,\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = \Gamma_{\tilde{p}q}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \quad \mathbf{r}_{,\tilde{q}}^{\tilde{n}} \equiv \partial_q \mathbf{r}^{\tilde{n}} = -\Gamma_{\tilde{p}q}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{p}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}.\tag{2.1.30}$$

Теперь выведем деривационные формулы, например, для двухвекторных базисов. С этой целью в первом соотношении (2.1.26) поднимем, например, индекс  $\check{p}$  и продифференцируем его по  $x^p$ . Имеем

$$\partial_p \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\cdot \check{n}} = \partial_p \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}^{\check{n}} + \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \partial_p \mathbf{r}^{\check{n}} = \mathbf{r}_{\tilde{m}p} \otimes \mathbf{r}^{\check{n}} + \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{,\check{p}}^{\check{n}}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}.\tag{2.1.31}$$

При выводе (2.1.31) было использовано правило дифференцирования обычного произведения функций, которое имеет место и в рассматриваемом случае. Его можно строго доказать, но на этом останавливаться не будем.

Учитывая (2.1.30) в (2.1.31), получаем искомое соотношение

$$\partial_p \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\cdot \tilde{n}} = \mathbf{R}_{\tilde{q}}^{\cdot \tilde{n}} \Gamma_{\tilde{m}p}^{\tilde{q}} - \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{q}p}^{\tilde{n}}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.32)$$

Перенося члены из правой части в левую, получим

$$\partial_p \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\cdot \tilde{n}} - \mathbf{R}_{\tilde{q}}^{\cdot \tilde{n}} \Gamma_{\tilde{m}p}^{\tilde{q}} + \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{q}p}^{\tilde{n}} = 0, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.33)$$

Левая часть соотношения (2.1.33) представляет ковариантную производную от мультиплекативного (двухвекторного) базиса. Вводя для ковариантной производной, как принято, обозначение  $\nabla_p$ , соотношение (2.1.33) представим в виде

$$\nabla_p \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\cdot \tilde{n}} = 0, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.1.34)$$

сохраняющем силу при жонглировании индексами.

Можно заметить, что, перенося члены из левых частей (2.1.30) в правые и вводя обозначение  $\nabla_p$  для оператора ковариантной производной, аналогично (2.1.34) имеем соотношение

$$\nabla_p \mathbf{r}_{\tilde{m}} = 0, \quad \nabla_p \mathbf{r}^{\tilde{n}} = 0, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.35)$$

Аналогично (2.1.34) и (2.1.35) доказывается справедливость утверждений для  $n$ -векторных базисов,  $n \in \mathbb{N}$ . Поэтому на этом не будем останавливаться. Эти утверждения можно сформулировать следующим образом:

**Утверждение 2.1.1.** Ковариантная производная от любого мультиплекативного базиса равна нулю.

## 2.1.7 Представление единичного тензора второго ранга

Исходя из обычного представления этого тензора [2, 22], на основании (2.1.12) и (2.1.13) получаем

$$\underline{\mathbf{E}} = g_{pq} \mathbf{r}^p \mathbf{r}^q = g_{pq} g_{\tilde{m}}^p g_{\tilde{n}}^q \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = g_{\tilde{m}q} g_{\tilde{n}}^q \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = g_{\tilde{m}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\tilde{n}},$$

т.е. имеем представление

$$\underline{\mathbf{E}} = g_{\tilde{m}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.1.36)$$

сохраняющее силу при жонглировании<sup>5</sup> немыми индексами.

По (2.1.36) видно, что элементы введенных выше матриц (2.1.10) представляют компоненты единичного тензора второго ранга (ЕТВР).

Введем следующие определения:

**Определение 2.1.30.** Рассмотренная выше параметризация, характеризующаяся заданием радиус-вектора произвольной точки в виде (2.1.1), называется новой параметризацией области тонкого тела трехмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ . При этом новая параметризация называется регулярной, если внутренняя  $S^{(-)}$  и внешняя  $S^{(+)}$  поверхности — регулярные поверхности.

---

<sup>5</sup>Под жонглированием немыми индексами понимается то, что, если один из индексов опускается, то соответствующий ему индекс поднимается, и наоборот.

**Определение 2.1.31.** Компоненты  $g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}$  и получаемые из них жонглированием индексами их образы, называются компонентами переноса ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела,  $\sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}$

**Определение 2.1.32.** Компоненты  $g_{\tilde{p}\tilde{q}}, g_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{q}}, g_{\tilde{p}\tilde{q}} \sim = - (\sim = +)$ , и компоненты переноса  $g_{\tilde{p}\tilde{q}}, g_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{q}}, \sim = +, \sim = - (\sim = -, \sim = +)$ , называются основными компонентами ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела, если в качестве основной базовой применяется внутренняя (внешняя) базовая поверхность.

## 2.1.8 Представления изотропных тензоров четвертого ранга

Эти тензоры<sup>6</sup> занимают особое место в механике деформируемого твердого тела (МДТТ). В частности, ими пользуются, например, при записи определяющих соотношений в линейной теории упругости для изотропного материала. Поэтому целесообразно иметь их представление и в предлагаемом варианте теории. Нетрудно выписать эти представления. В самом деле, при полном сокращении индексов у мультиплекативных базисов, составленных из четного числа базисных векторов, при условии, что каждая пара зацепленных индексов принадлежит только одному из  $\overset{(\sim)}{S}_g$ -семейств индексов,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , так что различные пары зацепленных индексов могут принадлежать разным семействам индексов, из мультиплекативных базисов получаются изотропные тензоры. Более того, компоненты этих тензоров остаются неизменными не только при ортогональных преобразованиях, а и при замене одних  $\overset{(\sim)}{S}_g$ -семейств реперов,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , другими.

Обнаружив такую структуру, очевидно, при полном сокращении индексов у мультиплекативного базиса из четырех базисных векторов надо ожидать получение всех изотропных тензоров четвертого ранга. Так как четырехвекторный мультиплекативный базис определяется как тензорное произведение четырех базисных векторов, то число его изомеров равно  $4! = 24$ . Нетрудно показать, что при полном сокращении индексов у всех изомеров, указанным выше способом, несводимыми друг к другу окажутся только следующие три:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{C}}}_I &= \mathbf{R}_{\tilde{m} \cdot \cdot \tilde{n}} = \mathbf{r}_{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{n}} = \underline{\underline{\underline{E}}} \underline{\underline{\underline{E}}} = g_{\tilde{m}\tilde{n}} g_{\tilde{n}\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \\ \underline{\underline{\underline{C}}}_{II} &= \mathbf{R}_{\tilde{m} \cdot \tilde{m} \tilde{n}} = \mathbf{r}_{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = g_{\tilde{m}\tilde{p}} g_{\tilde{n}\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \\ \underline{\underline{\underline{C}}}_{III} &= \mathbf{R}_{\tilde{n} \tilde{m} \cdot \cdot} = \mathbf{r}_{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = \mathbf{r}_{\tilde{n}} \underline{\underline{\underline{E}}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = g_{\tilde{m}\tilde{q}} g_{\tilde{n}\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (2.1.37)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Нетрудно усмотреть, что если  $\underline{\underline{\underline{H}}}$  — тензор второго ранга, то его двукратные свертывания с тензорами (2.1.37) приводят к тензорам

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{C}}}_I \cdot \cdot \underline{\underline{\underline{H}}} &= \underline{\underline{\underline{H}}} \cdot \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}_I = I_1(\underline{\underline{\underline{H}}}) \underline{\underline{\underline{E}}}, \quad \underline{\underline{\underline{C}}}_{II} \cdot \cdot \underline{\underline{\underline{H}}} = \underline{\underline{\underline{H}}} \cdot \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}_{II} = \underline{\underline{\underline{H}}}^T, \\ \underline{\underline{\underline{C}}}_{III} \cdot \cdot \underline{\underline{\underline{H}}} &= \underline{\underline{\underline{H}}} \cdot \cdot \underline{\underline{\underline{C}}}_{III} = \underline{\underline{\underline{H}}}, \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

где  $\underline{\underline{\underline{H}}}^T$  обозначает транспонированный тензор, а  $I_1(\underline{\underline{\underline{H}}})$  — первый инвариант тензора  $\underline{\underline{\underline{H}}}$ .

Пусть  $\underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{\underline{H}}} + \underline{\underline{\underline{H}}}^T)/2$  — симметричная, а  $\underline{\underline{\Omega}} = (\underline{\underline{\underline{H}}} - \underline{\underline{\underline{H}}}^T)/2$  — кососимметричная часть тензора  $\underline{\underline{\underline{H}}}$ . Тогда, как легко заметить, в силу (2.1.38) имеем

$$\frac{1}{2}(\underline{\underline{\underline{C}}}_{II} + \underline{\underline{\underline{C}}}_{III}) \cdot \cdot \underline{\underline{\underline{H}}} = \underline{\underline{S}}, \quad \frac{1}{2}(\underline{\underline{\underline{C}}}_{III} - \underline{\underline{\underline{C}}}_{II}) \cdot \cdot \underline{\underline{\underline{H}}} = \underline{\underline{\Omega}}. \quad (2.1.39)$$

---

<sup>6</sup>Различные применения этих тензоров можно найти в монографии [13]

Таким образом, тензор четвертого ранга  $\tilde{\Delta} = (\tilde{C}_{II} + \tilde{C}_{III})/2$  при двукратном свертывании с тензором  $\tilde{H}$  выделяет симметричную, а тензор  $\tilde{\kappa} = (\tilde{C}_{III} - \tilde{C}_{II})/2$  – кососимметричную часть и, следовательно, любой тензор  $\tilde{N}$  второго ранга можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \tilde{S} + \tilde{\Omega} = (\tilde{\Delta} + \tilde{\kappa}) \cdot \cdot \tilde{N} = \tilde{E} \cdot \cdot \tilde{N}, \\ \text{где } \tilde{S} &= \frac{1}{2}(\tilde{N} + \tilde{N}^T), \quad \tilde{\Omega} = \frac{1}{2}(\tilde{N} - \tilde{N}^T). \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

Отсюда и из третьего соотношения (2.1.38) видно, что тензор

$$\tilde{E} \equiv \tilde{C}_{III} = \tilde{\Delta} + \tilde{\kappa} = \frac{1}{2}(\tilde{C}_{III} + \tilde{C}_{II}) + \frac{1}{2}(\tilde{C}_{III} - \tilde{C}_{II}) \quad (2.1.41)$$

является единичным тензором в множестве тензоров вторых рангов относительно операции двукратного свертывания. Очевидно, в этом смысле он будет единичным тензором (единицей) в любом множестве тензоров, ранг которых не меньше двух. Что касается тензора  $\tilde{\Delta} = (\tilde{C}_{III} + \tilde{C}_{II})/2$ , он будет единичным тензором в том же смысле в множестве тензоров, ранг которых не меньше двух, а компоненты симметричны относительно первых и последних двух индексов. При этом  $\tilde{\Delta}$  будет левой (правой) единицей в множестве тензоров, ранг которых не меньше двух, а компоненты симметричны относительно первых (последних) двух индексов.

Следует отметить, что общее выражение изотропного тензора четвертого ранга будет иметь вид

$$\tilde{C} \equiv \lambda \tilde{C}_I + \mu (\tilde{C}_{III} + \tilde{C}_{II}) + \alpha (\tilde{C}_{III} - \tilde{C}_{II}) = \lambda \tilde{E} \tilde{E} + 2\mu \tilde{\Delta} + 2\alpha \tilde{\kappa}. \quad (2.1.42)$$

Нетрудно увидеть, что для тензоров  $\tilde{\Delta}$  и  $\tilde{\kappa}$  и их компонент в силу соответствующих соотношений (2.1.37) имеют место представления

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \Delta_{\tilde{m} \tilde{n} \tilde{p} \tilde{q}}^{\cdot \cdot \cdot \cdot} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad \Delta_{\tilde{m} \tilde{n} \tilde{p} \tilde{q}}^{\cdot \cdot \cdot \cdot} = \frac{1}{2}(g_{\tilde{m}\hat{p}} g_{\tilde{n}\hat{q}} + g_{\tilde{m}\hat{q}} g_{\tilde{n}\hat{p}}), \\ \tilde{\kappa} &= \kappa_{\tilde{m} \tilde{n} \tilde{p} \tilde{q}}^{\cdot \cdot \cdot \cdot} \mathbf{r}^{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}}, \quad \kappa_{\tilde{m} \tilde{n} \tilde{p} \tilde{q}}^{\cdot \cdot \cdot \cdot} = \frac{1}{2}(g_{\tilde{m}\hat{p}} g_{\tilde{n}\hat{q}} - g_{\tilde{m}\hat{q}} g_{\tilde{n}\hat{p}}), \quad \sim, \curvearrowleft, \wedge, \vee \in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

В силу первого соотношения (2.1.37) и (2.1.43) нетрудно выписать представления и для тензора (2.1.42) и его компонент, поэтому на этом останавливаться не будем.

Пусть два тензора второго ранга  $\tilde{P}$ , и  $\tilde{H}$  связаны между собой соотношениями

$$\tilde{P} = \tilde{C} \cdot \cdot \tilde{H}, \quad \tilde{H} = \tilde{J} \cdot \cdot \tilde{P}, \quad (2.1.44)$$

где  $\tilde{C}$  и  $\tilde{J}$  – тензоры четвертого ранга. Учитывая второе из соотношений (2.1.44) в первом, а потом, наоборот, первое во втором, получаем соответственно

$$\tilde{P} = \tilde{C} \cdot \cdot \tilde{J} \cdot \cdot \tilde{P} = (\tilde{C} \cdot \cdot \tilde{J}) \cdot \cdot \tilde{P}, \quad \tilde{H} = \tilde{J} \cdot \cdot \tilde{C} \cdot \cdot \tilde{H} = (\tilde{J} \cdot \cdot \tilde{C}) \cdot \cdot \tilde{H}. \quad (2.1.45)$$

Теперь, представляя тензоры  $\tilde{P}$  и  $\tilde{H}$  аналогично первому соотношению (2.1.40) и сравнивая с соотношениями (2.1.45) соответственно, нетрудно заметить, что

$$\tilde{C} \cdot \cdot \tilde{J} = \tilde{J} \cdot \cdot \tilde{H} = \tilde{C}_{III} = \tilde{\Delta} + \tilde{\kappa} \equiv \tilde{E}. \quad (2.1.46)$$

Итак, в общем случае взаимообратные тензоры четвертых рангов удовлетворяют соотношению (2.1.46).

Нетрудно доказать, что результаты всевозможных двукратных свертываний тензоров  $\underline{\underline{C}}_I, \underline{\underline{C}}_{II}, \underline{\underline{C}}_{III}, \underline{\underline{\Delta}}, \underline{\underline{\kappa}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{\mathbf{E}}}$  можно представить в виде следующей таблицы:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \underline{\underline{C}}_I & \underline{\underline{C}}_{II} & \underline{\underline{C}}_{III} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\kappa}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{\mathbf{E}}} \\ \underline{\underline{C}}_I & 3\underline{\underline{C}}_I & \underline{\underline{C}}_I & \underline{\underline{C}}_I & \underline{\underline{C}}_I & 0 & \underline{\underline{C}}_I & 3\underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{C}}_{II} & \underline{\underline{C}}_I & \underline{\underline{C}}_{III} & \underline{\underline{C}}_{II} & \underline{\underline{\Delta}} & -\underline{\underline{\kappa}} & \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{\kappa}} & \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{C}}_{III} & \underline{\underline{C}}_I & \underline{\underline{C}}_{II} & \underline{\underline{C}}_{III} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\kappa}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{C}}_I & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} & 0 & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{\kappa}} & 0 & -\underline{\underline{\kappa}} & \underline{\underline{\kappa}} & 0 & \underline{\underline{\kappa}} & \underline{\underline{\kappa}} & 0 \\ \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{C}}_I & \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{\kappa}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\kappa}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{\mathbf{E}}} & 3\underline{\underline{E}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{E}} & 0 & \underline{\underline{E}} & 3 \end{pmatrix}, \quad (2.1.47)$$

часть которой, получающаяся пересечением первых четырех строк и столбцов, приведена в приложении монографии [13].

Теперь допустим, что  $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$  — изотропный тензор четвертого ранга. Тогда аналогично (2.1.42) для него имеем представление

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}} \equiv \lambda' \underline{\underline{C}}_I + \mu' (\underline{\underline{C}}_{III} + \underline{\underline{C}}_{II}) + \alpha' (\underline{\underline{C}}_{III} - \underline{\underline{C}}_{II}) = \lambda' \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{E}}} + 2\mu' \underline{\underline{\Delta}} + 2\alpha' \underline{\underline{\kappa}}. \quad (2.1.48)$$

Найдем зависимости между постоянными  $\lambda, \mu, \alpha$  и  $\lambda', \mu', \alpha'$ . С этой целью, учитывая (2.1.42) и (2.1.48) в (2.1.46), получаем

$$\lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{E}}} + 2\mu \underline{\underline{\Delta}} + 2\alpha \underline{\underline{\kappa}} \cdot (\lambda' \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{E}}} + 2\mu' \underline{\underline{\Delta}} + 2\alpha' \underline{\underline{\kappa}}) = \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\kappa}}.$$

Отсюда в силу таблицы (2.1.47) имеем

$$(3\lambda\lambda' + 2\lambda\mu' + 2\mu\lambda') \underline{\underline{\mathbf{E}}} + 4\mu\mu' \underline{\underline{\Delta}} + 4\alpha\alpha' \underline{\underline{\kappa}} = \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\kappa}},$$

или

$$(3\lambda\lambda' + 2\lambda\mu' + 2\mu\lambda') \underline{\underline{\mathbf{E}}} + (4\mu\mu' - 1) \underline{\underline{\Delta}} + (4\alpha\alpha' - 1) \underline{\underline{\kappa}} = 0,$$

а отсюда в свою очередь заключаем, что

$$\begin{cases} 3\lambda\lambda' + 2\lambda\mu' + 2\mu\lambda' = 0, \\ 4\mu\mu' = 1, \\ 4\alpha\alpha' = 1. \end{cases} \quad (2.1.49)$$

Разрешая (2.1.49) сперва относительно  $\lambda', \mu'$  и  $\alpha'$ , а потом относительно  $\lambda, \mu$  и  $\alpha$ , получим

$$\begin{aligned} \lambda' &= -\frac{\lambda}{[2\mu(3\lambda + 2\mu)]}, & \mu' &= \frac{1}{4\mu}, & \alpha' &= \frac{1}{4\alpha}, \\ \lambda &= -\frac{\lambda'}{[2\mu'(3\lambda' + 2\mu')]} , & \mu &= \frac{1}{4\mu'}, & \alpha &= \frac{1}{4\alpha'}. \end{aligned} \quad (2.1.50)$$

Таким образом, если  $\underline{\underline{C}}$  и  $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$  — взаимообратные изотропные тензоры четвертого ранга, то связи постоянных  $\lambda, \mu, \alpha$  и  $\lambda', \mu', \alpha'$  определяются формулами (2.1.50).

В теории упругости  $\lambda$  и  $\mu$  называются постоянными Ламе, которые с другой парой постоянных, например, модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , связаны формулами

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{E}{[2(1+\nu)]}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{[(1+\nu)(1-2\nu)]}; \\ \nu &= \frac{\lambda}{[2(\lambda+\mu)]}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}.\end{aligned}\tag{2.1.51}$$

Тогда в силу (2.1.51) и (2.1.50) получаем

$$\lambda' = -\frac{\nu}{E}, \quad \mu' = \frac{1+\nu}{2E}, \quad \alpha' = \frac{1}{4\alpha}.\tag{2.1.52}$$

Следует заметить, что соотношения между основными парами упругих постоянных приведены в приложении V монографии [23].

Если  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  и  $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$  — взаимообратные изотропные тензоры четвертого ранга, то соотношения (2.1.44) в силу (2.1.42), (2.1.48), (2.1.50) и (2.1.52) представляются в виде

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{P}}} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{H}}} = (\lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{E}}} + 2\mu \underline{\underline{\Delta}} + 2\alpha' \underline{\underline{\kappa}}) \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{H}}}, \\ \underline{\underline{\mathbf{H}}} &= \underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \left\{ E^{-1}[-\nu \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{E}}} + (1+\nu) \underline{\underline{\Delta}}] + \frac{1}{2\alpha} \underline{\underline{\kappa}} \right\} \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}.\end{aligned}\tag{2.1.53}$$

## 2.1.9 О ковариантной производной от компонент тензоров

Так как выписанные ниже формулы для ковариантных производных от компонент тензоров первого и второго ранга легко обобщаются на компоненты тензоров более высокого ранга, ограничимся рассмотрением ковариантных производных от компонент тензоров первого и второго ранга.

Зная деривационные формулы для мультиплекативных базисов, легко определить ковариантную производную от компонент тензоров. В самом деле, пусть  $\mathbf{A}$  — тензор первого ранга (вектор), тогда его можно представить в виде

$$\mathbf{A} = A^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{p}} = A_{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{p}}, \quad \sim, \curvearrowleft \in \{-, \emptyset, +\}.\tag{2.1.54}$$

Дифференцируя первое равенство (2.1.54) по  $x^n$  и учитывая первую из деривационных формул (2.1.30), имеем

$$\begin{aligned}\partial_n \mathbf{A} &= \partial_n (A^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{p}}) = (\partial_n A^{\tilde{p}}) \mathbf{r}_{\tilde{p}} + A^{\tilde{p}} \partial_n \mathbf{r}_{\tilde{p}} = (\partial_n A^{\tilde{p}}) \mathbf{r}_{\tilde{p}} + A^{\tilde{p}} \Gamma_{\tilde{p}n}^{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} = \\ &= (\partial_n A^{\tilde{m}} + A^{\tilde{p}} \Gamma_{\tilde{p}n}^{\tilde{m}}) \mathbf{r}_{\tilde{m}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}.\end{aligned}$$

Аналогично, дифференцируя  $\mathbf{A} = A_{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{p}}$  по  $x^n$  и учитывая вторую из деривационных формул (2.1.30), получаем

$$\partial_n \mathbf{A} = \partial_n (A_{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{p}}) = (\partial_n A_{\tilde{m}} - A_{\tilde{p}} \Gamma_{\tilde{m}n}^{\tilde{p}}) \mathbf{r}^{\tilde{m}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Таким образом,

$$\partial_n \mathbf{A} = \nabla_n A^{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} = \nabla_n A_{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{m}}, \quad \sim, \curvearrowleft \in \{-, \emptyset, +\},$$

где для ковариантных производных введены обозначения

$$\nabla_n A^{\tilde{m}} = \partial_n A^{\tilde{m}} + A^{\tilde{p}} \Gamma_{\tilde{p}n}^{\tilde{m}}, \quad \nabla_n A^{\tilde{m}} = \partial_n A_{\tilde{m}} - A_{\tilde{p}} \Gamma_{\tilde{m}n}^{\tilde{p}}, \quad \sim, \curvearrowleft \in \{-, \emptyset, +\}.\tag{2.1.55}$$

Теперь рассмотрим тензор второго ранга  $\underline{\mathbf{H}}$  и представим его в следующем виде:

$$\underline{\mathbf{H}} = H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} = H_{\tilde{p} \tilde{q}} \mathbf{R}^{\tilde{p} \tilde{q}} = H_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} \mathbf{R}_{\cdot \tilde{q}}^{\tilde{p}} = H^{\tilde{p} \tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{p} \tilde{q}}, \quad \sim, \backsim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.56)$$

Дифференцируя, например, первое равенство (2.1.56) и учитывая деривационную формулу (2.1.32), получим

$$\begin{aligned} \partial_n \underline{\mathbf{H}} &= \partial_n (H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}}) = (\partial_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}}) \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} + H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} \partial_n \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} = \\ &= (\partial_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}}) \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} + H^{\tilde{r}}_{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{r} n}^{\tilde{p}} \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} - H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{s}} \Gamma_{\tilde{q} n}^{\tilde{s}} \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} = \partial_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} + H^{\tilde{r}}_{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{r} n}^{\tilde{p}} - H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{s}} \Gamma_{\tilde{q} n}^{\tilde{s}}) \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}}, \\ &\sim, \backsim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\partial_n \underline{\mathbf{H}} = (\nabla_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}}) \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}}, \quad \sim, \backsim \in \{-, \emptyset, +\},$$

где для ковариантной производной введено обозначение

$$\nabla_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} = \partial_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} + H^{\tilde{r}}_{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{r} n}^{\tilde{p}} - H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{s}} \Gamma_{\tilde{q} n}^{\tilde{s}}, \quad \sim, \backsim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.57)$$

Как видно из формул (2.1.55) и (2.1.57), нахождение выражений ковариантных производных от компонент тензоров, представленных в разных семействах базисов, производится по обычному правилу [2, 13, 22] с тем отличием, что семейства символов Кристоффеля определяются семействами немых индексов. Так, например, во втором слагаемом в правой части (2.1.57) немой индекс принадлежит одному из  $\overset{\sim}{g}$ -семейств,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , и поэтому семейство символов Кристоффеля соответственно принадлежит одному из  $\overset{\sim}{S}_{\overset{\sim}{g}}$ -семейств,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

Теперь докажем следующее

**Утверждение 2.1.2.** *Ковариантная производная от компонент единичного тензора второго ранга равна нулю.*

Для доказательства этого утверждения продифференцируем, например, первое равенство (2.1.10) по  $x^n$ . Получим

$$\partial_n g_{\tilde{p} \tilde{q}} = \partial_n (\mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}}) = \partial_n \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}} + \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \partial_n \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad \sim, \backsim \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Отсюда в силу первого соотношения деривационных формул (2.1.30) получаем

$$\partial_n g_{\tilde{p} \tilde{q}} = g_{\tilde{r} \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{p} n}^{\tilde{r}} + g_{\tilde{p} \tilde{r}} \Gamma_{\tilde{q} n}^{\tilde{r}}, \quad \sim, \backsim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.58)$$

Перенося члены, находящиеся в правой части (2.1.58), в левую и вводя обозначение для ковариантной производной, получим

$$\nabla_n g_{\tilde{p} \tilde{q}} = \partial_n g_{\tilde{p} \tilde{q}} - g_{\tilde{r} \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{p} n}^{\tilde{r}} - g_{\tilde{p} \tilde{r}} \Gamma_{\tilde{q} n}^{\tilde{r}} = 0, \quad \sim, \backsim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.59)$$

Если бы мы исходили из других соотношений (2.1.10), то аналогично (2.1.59) доказали справедливость утверждения при любом другом расположении индексов  $\tilde{p}$  и  $\tilde{q}$ . Таким образом,

$$\nabla_n g_{\tilde{p} \tilde{q}} = 0, \quad \nabla_n g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = 0, \quad \nabla_n g_{\tilde{q}}^{\tilde{p}} = 0, \quad \nabla_n g^{\tilde{p} \tilde{q}} = 0, \quad \sim, \backsim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.60)$$

Равенства (2.1.60) полностью доказывают утверждение.

Из утверждения (2.1.60) непосредственно вытекает

**Следствие 2.1.0.1.** Ковариантная производная от компонент изотропных и демитропных тензоров равна нулю.

Заметим, что компоненты демитропных тензоров, которые являются тензорами нечетного ранга, меняют знак при несобственном ортогональном преобразовании, тогда как компоненты изотропных тензоров остаются неизменными при любом ортогональном преобразовании. Кроме того, единственным демитропным тензором третьего ранга является дискриминантный тензор (тензор Леви-Чивита) [13]. Поэтому, вводя в рассмотрение в предлагаемом варианте теории, например, дискриминантный тензор третьего ранга

$$\mathbf{C} = C_{\tilde{p}\check{q}\hat{n}}^{\cdot\cdot\cdot} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\check{q}} \mathbf{r}^{\hat{n}}, \quad C_{\tilde{p}\check{q}\hat{n}}^{\cdot\cdot\cdot} = (\mathbf{r}_{\tilde{p}} \times \mathbf{r}_{\check{q}}) \cdot \mathbf{r}_{\hat{n}}, \quad \sim, \curvearrowleft, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.1.61)$$

в силу следствия 1.1.1 будем иметь

$$\nabla_m C_{\tilde{p}\check{q}\hat{n}}^{\cdot\cdot\cdot} = \partial_m C_{\tilde{p}\check{q}\hat{n}}^{\cdot\cdot\cdot} - C_{\tilde{r}\check{q}\hat{n}}^{\cdot\cdot\cdot} \Gamma_{\tilde{p}m}^{\tilde{r}} - C_{\tilde{p}\check{r}\hat{n}}^{\cdot\cdot\cdot} \Gamma_{\check{q}m}^{\tilde{r}} - C_{\tilde{p}\check{q}\hat{r}}^{\cdot\cdot\cdot} \Gamma_{\hat{n}m}^{\tilde{r}}, \quad \sim, \curvearrowleft, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.1.62)$$

Следует заметить, что с целью сокращения письма в (2.1.61) и (2.1.62) выписаны только ковариантные компоненты, хотя, конечно, при любом другом расположении индексов  $\tilde{p}$ ,  $\check{q}$ ,  $\hat{n}$ ,  $\sim, \curvearrowleft, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}$ , имеет место аналогичное (2.1.62) утверждение. Следовательно, равенство (2.1.62) можно получить еще и иным путем – дифференцированием второго соотношения (2.1.61) по  $x^m$ .

## 2.2 Связи между различными семействами параметризаций области тонкого тела

Введем следующее

**Определение 2.2.1.** Будем говорить, что связь между двумя семействами параметризаций области тонкого тела осуществлена, если найдены связи между порождающими эти семейства параметризаций семействами базисов и, вообще, между порожденными ими семействами базисов любыми семействами соответствующих геометрических характеристик, сопровождающими связываемые параметризации.

Очевидно, зная связь между двумя порождающими рассматриваемые семейства параметризаций семействами базисов, легко найти связь, например, между порожденными ими семействами символов Кристоффеля и, вообще, между порожденными ими любыми семействами соответствующих геометрических характеристик. Мы ограничимся нахождением связей между некоторыми семействами соответствующих геометрических характеристик, сопровождающими эти параметризации.

### 2.2.1 Связь между различными семействами мультиплекативных базисов

В силу соотношения (2.1.12), дающего связь между различными семействами базисов, нетрудно найти связи между различными семействами мультиплекативных базисов. В самом деле, легко усмотреть, что связи, например, между двухвекторными мультиплекативными базисами будут иметь вид

$$\mathbb{R}_{\tilde{p}\cdot}^{\cdot\check{q}} = g_{\tilde{p}}^{\hat{m}} g_{\hat{n}}^{\check{q}} \mathbb{R}_{\hat{n}\cdot}^{\cdot\check{m}}, \quad \sim, \curvearrowleft, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.2.1)$$

сохраняющий силу при жонглировании индексами.

Следует заметить, что обобщение (2.2.1) на мультиплекативные базисы, состоящие из более чем двух базисных векторов, не представляет большого труда и поэтому на этом с целью сокращения письма не будем останавливаться, а в случае необходимости по аналогии (2.2.1) выпишем нужные соотношения.

## 2.2.2 Связь между различными семействами символов Кристоффеля

Найдем связи между  $\overset{(\sim)}{S}_{g(\sim)}$ - и  $\overset{(\sim)}{S}_{g(\sim)}$ -семействами символов Кристоффеля<sup>7</sup>,  $\sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}$ . В этой связи, дифференцируя (2.1.12) по  $x^q$  и пользуясь определениями символов Кристоффеля (2.1.28), получаем

$$\partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} = \partial_q (g_{\tilde{p}}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\check{n}}) = (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\check{n}}) \mathbf{r}_{\check{n}} + g_{\tilde{p}}^{\check{n}} \partial_q \mathbf{r}_{\check{n}} = (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\check{n}}) \mathbf{r}_{\check{n}} + g_{\tilde{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}\check{q}}^{\check{n}} \mathbf{r}_{\check{n}} = (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\check{n}} + g_{\tilde{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}\check{q}}^{\check{n}}) \mathbf{r}_{\check{n}},$$

$$\sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Таким образом,

$$\partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} = (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\check{n}} + g_{\tilde{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}\check{q}}^{\check{n}}) \mathbf{r}_{\check{n}} = (\partial_q g_{\tilde{p}\check{n}} - g_{\tilde{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}\check{q},\check{n}}) \mathbf{r}^{\check{n}}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.2.2)$$

где второе равенство (2.2.2) получается аналогично первому.

Умножая (2.2.2) почленно сначала на  $\mathbf{r}_{\tilde{l}} = g_{\tilde{l}}^{\check{k}} \mathbf{r}_{\check{k}}$ , а потом на  $\mathbf{r}^{\tilde{l}} = g_{\tilde{k}}^{\check{l}} \mathbf{r}^{\check{k}}$  и учитывая определения символов Кристоффеля (2.1.28), получим искомые связи. А именно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{p}\tilde{q},\tilde{l}} &= g_{\tilde{l}\check{n}} (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\check{n}} + g_{\tilde{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}\check{q}}^{\check{n}}) = g_{\tilde{l}\check{n}} (\partial_q g_{\tilde{p}\check{n}} - g_{\tilde{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}\check{q},\check{n}}), \\ \Gamma_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{l}} &= g_{\tilde{n}}^{\tilde{l}} (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\check{n}} + g_{\tilde{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}\check{q}}^{\check{n}}) = g_{\tilde{n}}^{\tilde{l}\check{n}} (\partial_q g_{\tilde{p}\check{n}} - g_{\tilde{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}\check{q},\check{n}}), \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Следует заметить, что соотношения (2.2.3) совпадают с аналогичными соотношениями из работ [17, 18].

## 2.2.3 Связи между компонентами и ковариантными производными от компонент многоточечного тензора

Предполагается, что рассматриваемый тензор представлен в различных семействах мультиплекативных базисов. Ограничимся рассмотрением тензора второго ранга  $\underline{\mathbf{H}}$ , представления которого имеют вид

$$\underline{\mathbf{H}} = H_{\tilde{p}\cdot}^{\cdot\check{q}} \mathbb{R}_{\cdot\check{q}}^{\tilde{p}\cdot} = H_{\cdot\check{n}}^{\hat{m}\cdot} \mathbb{R}_{\hat{m}\cdot}^{\cdot\check{n}}, \quad \sim, \sim, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.2.4)$$

конечно, сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Отсюда, учитывая линейную независимость мультиплекативных базисов  $\mathbb{R}_{\cdot\check{q}}^{\tilde{p}\cdot}$ ,  $\sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , искомые связи между компонентами представляются в виде

$$H_{\tilde{p}\cdot}^{\cdot\check{q}} = g_{\tilde{p}\hat{m}} g_{\check{q}\check{n}} H_{\cdot\check{n}}^{\hat{m}\cdot}, \quad \sim, \sim, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.2.5)$$

сохраняющим силу при жонглировании индексами.

---

<sup>7</sup>Классификация символов Кристоффеля подробнее рассмотрена в [17, 18].

Нетрудно найти связи и между ковариантными производными от компонент тензора  $\underline{H}$ . В самом деле, в силу утверждения 1.1.2 и правила нахождения ковариантной производной от суммы и произведения компонент тензоров из (2.2.5) имеем

$$\nabla_s H_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} = \nabla_s (g_{\tilde{p}\hat{m}} g^{\hat{q}\hat{n}} H_{\cdot \hat{n}}^{\hat{m}}) = \nabla_s (g_{\tilde{p}\hat{m}} g^{\hat{q}\hat{n}}) H_{\cdot \hat{n}}^{\hat{m}} + g_{\tilde{p}\hat{m}} g^{\hat{q}\hat{n}} \nabla_s H_{\cdot \hat{n}}^{\hat{m}} = g_{\tilde{p}\hat{m}} g^{\hat{q}\hat{n}} \nabla_s H_{\cdot \hat{n}}^{\hat{m}},$$

$$\sim, \curvearrowleft, \curvearrowright, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Таким образом, искомые связи имеют вид

$$\nabla_s H_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} = g_{\tilde{p}\hat{m}} g^{\hat{q}\hat{n}} \nabla_s H_{\cdot \hat{n}}^{\hat{m}}, \quad \sim, \curvearrowleft, \curvearrowright, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.2.6)$$

сохраняющий силу при жонглировании индексами, за исключением индекса  $s$ .

Заметим, что обобщение (2.2.5) и (2.2.6) на компоненты тензоров более высокого ранга не представляет труда, поэтому на этом мы останавливаться не будем, а заинтересованный читатель легко справится с этой задачей самостоятельно.

## 2.3 О компонентах ЕТВР

В этом разделе подробнее рассматриваются различные семейства компонент ЕТВР. В частности, приводятся их удобные для пользования с точки зрения практики развернутые представления как при общих, так и при частных случаях семейств параметризаций.

Следует заметить, что на протяжении всего раздела за основную базовую принимается внутренняя базовая поверхность  $\overset{(-)}{S}$ . Тогда в силу определения (2.1.32) основными компонентами ЕТВР являются компоненты  $g_{\bar{p}\bar{q}}$ ,  $g_{\bar{p}}^{\bar{q}}$ ,  $g^{\bar{p}\bar{q}}$  и компоненты переноса  $g_{\bar{p}\bar{q}}$ ,  $g_{+}^{\bar{q}}$ , играющие важную роль в предлагаемой теории в том смысле, что остальные компоненты и большинство геометрических характеристик выражаются через них.

### 2.3.1 Об основных компонентах ЕТВР и число независимых основных компонент ЕТВР

В силу определения (2.1.32) в рассматриваемом случае, когда в качестве основной базовой принята внутренняя базовая поверхность  $\overset{(-)}{S}$ , можно ввести следующие определения:

**Определение 2.3.1.** Компоненты  $g_{\bar{p}\bar{q}}$ ,  $g_{+}^{\bar{q}}$ ,  $g^{\bar{p}\bar{q}}$  и компоненты переноса  $g_{\bar{p}\bar{q}}$ ,  $g_{+}^{\bar{q}}$ , называются основными компонентами ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела, если в качестве основной базовой принимается внутренняя базовая поверхность  $\overset{(-)}{S}$ .

**Определение 2.3.2.** Компоненты  $g_{\bar{p}\bar{q}}$ ,  $g_{+}^{\bar{q}}$  называются основными компонентами переноса ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела, если в качестве основной базовой принимается внутренняя базовая поверхность  $\overset{(-)}{S}$ .

В рассматриваемом случае на первый взгляд число независимых основных компонент ЕТВР должно быть 15. Это 6 компонент  $g_{\bar{p}\bar{q}} = g_{\bar{q}\bar{p}}$  и 9 основных компонент переноса  $g_{\bar{p}\bar{q}}$

ЕТВР (в силу (2.1.13) при  $\sim, \curvearrowleft \in \{-, +\}$ ,  $* = -$  остальные основные компоненты выражаются через эти компоненты). Однако число независимых основных компонент значительно меньше 15.

С целью установления числа независимых основных компонент ЕТВР найдем зависимости между ними. В этой связи продифференцируем  $g_{\bar{q}\bar{3}} = \mathbf{r}_{\bar{q}} \cdot \mathbf{h}$  по  $x^p$  и учтем (2.1.3), второе соотношение (2.1.4) и (2.1.7). Имеем

$$\begin{aligned} \partial_p g_{\bar{q}\bar{3}} &= \partial_p (\mathbf{r}_{\bar{q}} \cdot \mathbf{h}) = \partial_p \mathbf{r}_{\bar{q}} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{r}_{\bar{q}} \cdot \partial_p \mathbf{h} = \partial_p \mathbf{r}_{\bar{q}} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{r}_{\bar{q}} \cdot (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_{\bar{p}}) = \\ &= \partial_p \mathbf{r}_{\bar{q}} \cdot \mathbf{h} + g_{\bar{p}\bar{q}} - g_{\bar{p}\bar{q}} = \Gamma_{\bar{q}\bar{p},\bar{3}} + g_{\bar{p}\bar{q}} - g_{\bar{p}\bar{q}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\partial_p g_{\bar{q}\bar{3}} = \partial_p \mathbf{r}_{\bar{q}} \cdot \mathbf{h} + g_{\bar{p}\bar{q}} - g_{\bar{p}\bar{q}} = \Gamma_{\bar{q}\bar{p},\bar{3}} + g_{\bar{p}\bar{q}} - g_{\bar{p}\bar{q}},$$

Меняя в этом соотношении местами индексы  $p$  и  $q$ , получим

$$\partial_q g_{\bar{p}\bar{3}} = \partial_q \mathbf{r}_{\bar{p}} \cdot \mathbf{h} + g_{\bar{q}\bar{p}} - g_{\bar{q}\bar{p}} = \Gamma_{\bar{p}\bar{q},\bar{3}} + g_{\bar{q}\bar{p}} - g_{\bar{q}\bar{p}}.$$

Вычитая последнее соотношение почленно из предпоследнего, получим

$$\omega_{pq} \equiv \partial_p g_{\bar{q}\bar{3}} - \partial_q g_{\bar{p}\bar{3}} = (\partial_p \mathbf{r}_{\bar{q}} - \partial_q \mathbf{r}_{\bar{p}}) \cdot \mathbf{h} + g_{\bar{p}\bar{q}} - g_{\bar{p}\bar{q}} = (\Gamma_{\bar{q}\bar{p},\bar{3}} - \Gamma_{\bar{p}\bar{q},\bar{3}}) + g_{\bar{p}\bar{q}} - g_{\bar{p}\bar{q}}. \quad (2.3.1)$$

Нетрудно заметить, что  $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$ , т.е.  $\omega_{pq}$  — кососимметричная матрица, поэтому из 9 элементов (2.3.1) отличными от нуля будут следующие три:  $\omega_{I3} = -\omega_{3I}$ ,  $\omega_{IJ} = -\omega_{JI}$ .

Таким образом, получим следующие три соотношения между основными компонентами ЕТВР:

$$\begin{aligned} \omega_{I3} &= \partial_I g_{\bar{3}\bar{3}} = 2h\partial_I h = 2\mathbf{r}_{\bar{3}} \cdot \partial_I \mathbf{h} = 2\Gamma_{\bar{3}\bar{I},\bar{3}} = 2(g_{\bar{I}\bar{3}} - g_{\bar{3}\bar{I}}), \\ \omega_{IJ} &= \partial_I g_{\bar{J}\bar{3}} - \partial_J g_{\bar{I}\bar{3}} = g_{\bar{I}\bar{J}} - g_{\bar{J}\bar{I}}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Из первого соотношения (2.3.2) имеем

$$g_{\bar{I}\bar{3}} = g_{\bar{I}\bar{3}} + h\partial_I h = g_{\bar{I}\bar{3}} + h^2\partial_I \ln h = g_{\bar{I}\bar{3}} + \Gamma_{\bar{3}\bar{I},\bar{3}}, \quad (2.3.3)$$

а отсюда получаем

$$g_{\bar{I}}^{\bar{3}} = g^{\bar{3}\bar{q}} g_{\bar{I}\bar{q}} = g_{\bar{3}\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}} \cdot \mathbf{r}_{\bar{I}} = \mathbf{r}_{\bar{I}}^{\bar{3}} \cdot (\mathbf{r}_{\bar{I}} + \partial_I \bar{h}) = g_{\bar{I}}^{\bar{3}} + \Gamma_{\bar{3}\bar{I}}^{\bar{3}}, \quad (2.3.4)$$

где

$$\Gamma_{\bar{3}\bar{I},\bar{3}} = h\partial_I h = h^2\partial_I \ln h, \quad \Gamma_{\bar{3}\bar{I}}^{\bar{3}} = g^{\bar{3}\bar{q}} \Gamma_{\bar{3}\bar{I},\bar{q}}. \quad (2.3.5)$$

Легко усмотреть, что в силу (2.1.7) имеем еще три соотношения между основными компонентами ЕТВР:

$$g_{\bar{3}\bar{m}}^{\bar{3}} = g_{\bar{3}\bar{m}}. \quad (2.3.6)$$

Таким образом, в общем случае параметризации области тонкого тела, т.е. когда  $\mathbf{h}$  не является перпендикуляром к базовым поверхностям  $\overset{(-)}{S}$  и  $\overset{(+)}{S}$ , основные компоненты ETBP связаны между собой шестью соотношениями (2.3.2) и (2.3.6) и в рассматриваемом случае число независимых основных компонент ETBP равно 15-6=9.

В качестве независимых основных компонент ETBP можно рассмотреть, например, следующие:

$$g_{pq} = g_{qp}; \quad g_{11}^-, \quad g_{12}^-, \quad g_{22}^- \quad (2.3.7)$$

Компоненты  $g_{I3}^-$  и  $g_{3m}^-$  определяются из соотношений (2.3.3) и (2.3.6) соответственно, а  $g_{21}^-$  можно определить из второго соотношения (2.3.2).

Теперь рассмотрим частный случай, когда  $\mathbf{h}$  перпендикулярен внутренней базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$  ( $\mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}$ ). В этом случае, нетрудно увидеть, что

$$g_{I3}^- = 0, \quad g_I^{\bar{3}} = 0, \quad g^{\bar{I}\bar{3}} = 0, \quad g^{\bar{3}\bar{3}} = h^{-2} = g_{33}^{-1} \quad (2.3.8)$$

и, следовательно, в силу первого соотношения (2.3.8) число независимых основных компонент (2.3.7) сокращается на две единицы и их число становится равным 7.

Учитывая третье и четвертое соотношения (2.3.8) и первое соотношение (2.3.5), из второго соотношения (2.3.5) получаем

$$\Gamma_{3I}^{\bar{3}} = g^{\bar{3}\bar{3}} \Gamma_{3I,3} = \partial_I \ln h. \quad (2.3.9)$$

Теперь, подставляя первое соотношение (2.3.8) в (2.3.3), а второе соотношение (2.3.8) и (2.3.9) в (2.3.4), имеем соответственно

$$g_{I3}^- = h^2 \partial_I \ln h, \quad g_I^{\bar{3}} = \partial_I \ln h \quad \text{при } \mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}. \quad (2.3.10)$$

Нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае из (2.3.2) получаем

$$g_{IJ}^- = g_{JI}^- \quad \text{при } \mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}. \quad (2.3.11)$$

На основании соотношения (2.3.11) заключаем, что  $g_{21}^- = g_{12}^-$ , а число независимых основных компонент ETBP в рассматриваемом случае больше не уменьшается.

Таким образом, в том случае, когда  $\mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}$  и на базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$  координатные линии не являются ортогональными линиями, в качестве независимых основных компонент ETBP можно рассматривать следующие:

$$g_{IJ}^- = g_{JI}^-, \quad g_{33}^- = h^2; \quad g_{11}^-, \quad g_{12}^-, \quad g_{22}^-. \quad (2.3.12)$$

Следовательно, если координатные линии на базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$  являются ортогональными линиями и  $\mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}$ , то  $g_{12}^- = g_{21}^- = 0$  и число независимых основных компонент ETBP (2.3.12) уменьшается еще на одно и становится 6, т.е. в этом случае имеем следующие независимые основные компоненты:

$$g_{11}^-, \quad g_{22}^-, \quad g_{33}^-; \quad g_{11}^-, \quad g_{12}^-, \quad g_{22}^-. \quad (2.3.13)$$

Ниже увидим, что в более частных случаях параметризации на базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$ , число независимых основных компонент ЕТВР еще уменьшится.

Далее с целью более наглядного представления выражений компонент переноса ЕТВР  $g_{k\bar{l}}$ ,  $g_k^{\bar{l}}$ ,  $g_{\bar{l}}^k$ ,  $g^{k\bar{l}}$  и некоторых других геометрических характеристик через основные компоненты ЕТВР выпишем их в развернутом виде при различных частных случаях параметризаций области тонкого тела, а также рассмотрим некоторые вопросы теории.

### 2.3.2 Представления компонент ЕТВР через основные компоненты переноса того же тензора при различных семействах параметризации области тонкого тела

Рассматриваются различные семейства параметризаций области тонкого тела и даются развернутые представления компонент ЕТВР через основные компоненты переноса того же тензора при рассматриваемых семействах параметризаций.

#### 2.3.2.1 Вектор $h$ не перпендикулярен к базовым поверхностям

Получим представления компонент переноса ЕТВР через основные компоненты переноса того же тензора. Нетрудно заметить, что

$$g_{k\bar{l}} \sim (g_{K\bar{L}}, g_{K\bar{3}}, g_{\bar{3}\bar{L}}, g_{\bar{3}\bar{3}}), \quad g_k^{\bar{l}} \sim (g_K^{\bar{L}}, g_K^{\bar{3}}, g_3^{\bar{l}}),$$

где  $\sim$  — символ эквивалентности.

Требуется выписать выражения каждой из этих компонент. В силу (2.1.11) получаем

$$\begin{aligned} g_{K\bar{L}} &= (1 - x^3)g_{K\bar{L}} + x^3g_{\bar{L}\bar{L}}, & g_K^{\bar{L}} &= (1 - x^3)g_K^{\bar{L}} + x^3g_{\bar{K}\bar{L}}, \\ g_{K\bar{3}} &= (1 - x^3)g_{K\bar{3}} + x^3g_{\bar{K}\bar{3}}, & g_K^{\bar{3}} &= x^3g_{\bar{K}\bar{3}}, \\ g_{\bar{3}\bar{L}} &= g_{\bar{3}\bar{L}}, & g_3^{\bar{l}} &= g_{\bar{3}\bar{l}}, \\ g_{\bar{3}\bar{3}} &= g_{\bar{3}\bar{3}} = h^2, & & \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Аналогично (2.3.14) имеем

$$g^{k\bar{l}} \sim (g^{K\bar{L}}, g^{K\bar{3}}, g^{3\bar{L}}, g^{3\bar{3}}), \quad g_{\bar{l}}^k \sim (g_{\bar{L}}^K, g_{\bar{3}}^K, g_{\bar{L}}^3, g_{\bar{3}}^3). \tag{2.3.15}$$

Для нахождения выражений компонент (2.3.15) можно воспользоваться соотношением (2.1.24). Сначала из (2.1.21) найдем выражения для  $\mathbf{r}^K$  и  $\mathbf{r}^3$ , а затем с их помощью — выражения для компонент (2.3.15).

Из (2.1.21) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^K &= \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{KPq} \epsilon_{lmn} g_P^{\tilde{m}} g_q^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{l}} + \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{K3q} \epsilon_{lmn} g_3^{\tilde{m}} g_q^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{l}} = \\ &= \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{KP3} \epsilon_{lmn} g_P^{\tilde{m}} g_3^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{l}} + \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{K3Q} \epsilon_{L3N} g_Q^{\tilde{N}} \mathbf{r}^{\tilde{L}} = \\ &= \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{KP3} \epsilon_{LM3} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}} + \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{KQ3} \epsilon_{LN3} g_Q^{\tilde{N}} \mathbf{r}^{\tilde{L}} = \overset{(\sim)}{\vartheta}^{-1} \epsilon^{KP} \epsilon_{LM} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}}. \end{aligned}$$

Не будет лишним, если укажем и другой путь, более короткий и удобный для нахождения выражений для  $\mathbf{r}^K$ . В самом деле, в силу (2.1.12) при  $\sim \in \emptyset$  имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^K &= C^{KL} \mathbf{r}_L \times \mathbf{r}_3 = C^{KL} g_L^{\tilde{M}} \mathbf{r}_{\tilde{M}} \times \mathbf{r}_3 = C^{KL} g_L^{\tilde{M}} C_{\tilde{M} \tilde{N}} \mathbf{r}^{\tilde{N}} = \\ &= \sqrt{\circ gg^{-1}} \epsilon^{KL} \epsilon_{NM} g_L^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{N}} = \overset{(\sim)}{\vartheta}{}^{-1} \epsilon^{KL} \epsilon_{NM} g_L^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{N}}.\end{aligned}$$

Аналогично исходя из (2.1.24) можно найти выражение и для  $\mathbf{r}^3$ . Однако найдем его более коротким путем. Из (2.1.12) получаем

$$\mathbf{r}^{\tilde{3}} = g_k^{\tilde{3}} \mathbf{r}^k = g_3^{\tilde{3}} \mathbf{r}^3 + g_K^{\tilde{3}} \mathbf{r}^K = \mathbf{r}^3 + g_K^{\tilde{3}} \mathbf{r}^K,$$

а отсюда, учитывая предыдущее соотношение,

$$\mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^{\tilde{3}} - g_K^{\tilde{3}} \mathbf{r}^K = \mathbf{r}^{\tilde{3}} + \overset{(\sim)}{\vartheta}{}^{-1} g_K^{\tilde{3}} \epsilon^{KP} \epsilon_{ML} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}}.$$

С другой стороны из (2.1.12) имеем

$$\mathbf{r}^3 = g_{\tilde{N}}^3 \mathbf{r}^{\tilde{N}} = \mathbf{r}^{\tilde{3}} + g_{\tilde{N}}^3 \mathbf{r}^{\tilde{N}}.$$

Сравнивая два последних соотношения, заключаем, что

$$g_L^3 = \overset{(\sim)}{\vartheta}{}^{-1} g_K^{\tilde{3}} \epsilon^{KP} \epsilon_{ML} g_P^{\tilde{M}}, \quad \sim \in \{-, +\}.$$

Таким образом, мы получили более общие соотношения, чем требовалось, а именно

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^K &= \overset{(\sim)}{\vartheta}{}^{-1} \epsilon^{KP} \epsilon_{LM} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}}, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^{\tilde{3}} + g_{\tilde{L}}^3 \mathbf{r}^{\tilde{L}} \\ g_{\tilde{L}}^3 &= \overset{(\sim)}{\vartheta}{}^{-1} g_K^{\tilde{3}} \epsilon^{KP} \epsilon_{ML} g_P^{\tilde{M}}, \quad \sim \in \{-, +\}.\end{aligned}\tag{2.3.16}$$

Из (2.3.16) при  $\sim = -$  получаем искомые соотношения

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^K &= \overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1} \epsilon^{KP} \epsilon_{LM} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}}, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^{\tilde{3}} + g_{\tilde{L}}^3 \mathbf{r}^{\tilde{L}}, \\ g_{\tilde{L}}^3 &= \overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1} g_K^{\tilde{3}} \epsilon^{KP} \epsilon_{ML} g_P^{\tilde{M}}.\end{aligned}\tag{2.3.17}$$

Приведем (2.3.17) к более компактному виду. Вводя обозначения

$$A_{\tilde{M}}^K \equiv \epsilon^{KL} \epsilon_{MN} g_L^{\tilde{N}} = g_{\tilde{M}}^{\tilde{K}} + x^3 a_{\tilde{M}}^{\tilde{K}}, \quad a_{\tilde{M}}^{\tilde{K}} \equiv (g_{\tilde{I}}^{\tilde{I}} - 1) g_{\tilde{M}}^{\tilde{K}} - g_{\tilde{M}}^{\tilde{K}},\tag{2.3.18}$$

соотношения (2.3.17) представляются в виде

$$\mathbf{r}^K = \overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1} A_{\tilde{M}}^K \mathbf{r}^{\tilde{M}}, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^{\tilde{3}} + g_{\tilde{M}}^3 \mathbf{r}^{\tilde{M}}, \quad g_{\tilde{M}}^3 = - \overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1} g_K^{\tilde{3}} A_{\tilde{M}}^K.\tag{2.3.19}$$

Теперь в силу (2.3.19) нетрудно выписать искомые выражения для компонент (2.3.15). В самом деле, на основании их определения получаем

$$\begin{aligned} g^{K\bar{L}} &= \overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1} A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, & g^K_{\bar{M}} &= \overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1} A_{\bar{M}}^K, \\ g^{K\bar{3}} &= \overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1} A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{3}}, & g^K_{\bar{3}} &= 0, \\ g^{3\bar{L}} &= g^{\bar{3}\bar{L}} - \overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1} g_K^{\bar{3}} A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, & g^3_{\bar{M}} &= -\overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1} g_K^{\bar{3}} A_{\bar{M}}^K, \\ g^{3\bar{3}} &= g^{\bar{3}\bar{3}} - \overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1} g_K^{\bar{3}} A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{3}}, & g^3_{\bar{3}} &= 1. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Теперь более внимательно рассмотрим, например, первое из соотношений (2.1.20). Запишем его в виде квадратного трехчлена относительно  $x^3$ . Имеем

$$\overset{(-)}{\vartheta} = (1 - x^3)^2 + x^3(1 - x^3)g_{+I}^{\bar{I}} + (x^3)^2 \overset{(\mp)}{\vartheta} = (1 - g_{+I}^{\bar{I}} + \overset{(\mp)}{\vartheta})(x^3)^2 - (2 - g_{+I}^{\bar{I}})x^3 + 1. \quad (2.3.21)$$

Учитывая (2.1.18) при  $\sim = +$ ,  $\curvearrowleft = -$ , соотношению (2.3.21) можно придать следующий вид

$$\overset{(-)}{\vartheta} = \left[ (1 - g_{+1}^{\bar{1}})(1 - g_{+2}^{\bar{2}}) + g_{+1}^{\bar{2}} g_{+2}^{\bar{1}} \right] (x^3)^2 - \left[ (1 - g_{+1}^{\bar{1}}) + (1 - g_{+2}^{\bar{2}}) \right] x^3 + 1. \quad (2.3.22)$$

Рассмотрим дискриминант квадратного трехчлена. Исходя, например, из (2.3.21), имеем

$$D = (2 - g_{+I}^{\bar{I}})^2 - 4(1 - g_{+I}^{\bar{I}} + \overset{(\mp)}{\vartheta}) = (g_{+I}^{\bar{I}})^2 - 4\overset{(\mp)}{\vartheta} = (g_{+I}^{\bar{I}})^2 - 4 \det(g_{+I}^{\bar{J}}).$$

Далее, раскрывая детерминант, получим

$$D = (g_{+1}^{\bar{1}} - g_{+2}^{\bar{2}})^2 + 4g_{+2}^{\bar{1}} g_{+1}^{\bar{2}}. \quad (2.3.23)$$

**Утверждение 2.3.1.** Дискриминант (2.3.23) квадратного трехчлена (2.3.22) неотрицателен, т.е.  $D \geq 0$ .

*Доказательство.* В самом деле,  $g_{+I}^{\bar{I}}$  и  $\det(g_{+I}^{\bar{J}})$  — инварианты, поэтому и дискриминант  $D$  инвариантен. Так как  $D$  инвариантен, то утверждение достаточно доказать относительно специально выбранной системы координат. Выбирая в рассматриваемой точке ортогональную систему координат (необязательно декартову) и учитывая (2.3.11), имеем

$$g_{+2}^{\bar{1}} g_{+1}^{\bar{2}} = g_{+2I}^{\bar{1}\bar{I}} g_{+2I}^{\bar{2}\bar{J}} g_{+1J}^{\bar{1}\bar{J}} = g_{+21}^{\bar{1}\bar{1}} g_{+21}^{\bar{2}\bar{2}} g_{+12}^{\bar{1}\bar{2}} = g_{+12}^{\bar{1}\bar{1}} g_{+12}^{\bar{2}\bar{2}} (g_{+12}^{\bar{1}\bar{2}})^2 \geq 0.$$

Итак, в ортогональной пространственной системе координат в рассматриваемой точке (2.3.23) представляется в виде

$$D = (g_{+1}^{\bar{1}} - g_{+2}^{\bar{2}})^2 + 4g_{+2}^{\bar{1}\bar{1}} g_{+1}^{\bar{2}\bar{2}} (g_{+12}^{\bar{1}\bar{2}})^2 \geq 0, \quad (2.3.24)$$

что и требовалось доказать.

В силу (2.3.24) квадратный трехчлен (2.3.22) обращается в нуль при следующих двух значениях  $x^3$ :

$$(x^3)_{1,2} = \frac{2 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} \pm \sqrt{(g_{\bar{1}}^{\bar{1}} - g_{\bar{2}}^{\bar{2}})^2 + 4g_{\bar{2}}^{\bar{1}}g_{\bar{1}}^{\bar{2}}}}{2[(1 - g_{\bar{1}}^{\bar{1}})(1 - g_{\bar{2}}^{\bar{2}}) - g_{\bar{2}}^{\bar{1}}g_{\bar{1}}^{\bar{2}}]}. \quad (2.3.25)$$

Далее рассмотрим два частных случая параметризации области тонкого тела: первый – вектор  $\mathbf{h}$  перпендикулярен к поверхности  $\overset{(-)}{S}$ , второй – вектор  $\mathbf{h}$  перпендикулярен к поверхности  $\overset{(-)}{S}$  и при этом координатные линии на основной базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$  являются линиями кривизны.

Можно также рассматривать случаи, когда на основной базовой поверхности параметризация осуществляется посредством асимптотических, изометрических и сопряженно-изометрических линий, однако после изложения двух указанных выше случаев рассмотрение этих случаев не представляет большого труда. Поэтому на этом мы останавливаться не будем, а заинтересованный читатель может посмотреть изложение этих случаев параметризации поверхности в [2, 3].

### 2.3.2.2 Вектор $\mathbf{h}$ перпендикулярен к основной базовой поверхности

В этом случае, как известно, имеют место соотношения (2.3.8) и (2.3.10) и, учитывая их, (2.3.14) и (2.3.20) соответственно представляются в видах

$$\begin{aligned} g_{K\bar{L}} &= (1 - x^3)g_{\bar{K}\bar{L}} + x^3g_{\bar{L}\bar{K}}, & g_{\bar{K}}^{\bar{L}} &= (1 - x^3)g_{\bar{K}}^{\bar{L}} + x^3g_{\bar{L}}^{\bar{K}}, \\ g_{K\bar{3}} &= x^3g_{\bar{K}\bar{3}} = x^3h^2\partial_I \ln h, & g_{\bar{K}}^{\bar{3}} &= x^3g_{\bar{K}}^{\bar{3}} = x^3\partial_I \ln h, \\ g_{\bar{3}\bar{L}} &= 0, & g_3^{\bar{l}} &= g_{\bar{3}}^{\bar{l}}; \\ g_{\bar{3}\bar{3}} &= g_{\bar{3}\bar{3}} = h^2, & & \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

$$\begin{aligned} g^{K\bar{L}} &= \vartheta^{-1}A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, & g_{\bar{L}}^K &= \vartheta^{-1}A_{\bar{L}}^K, \\ g^{K\bar{3}} &= 0, & g_{\bar{3}}^K &= 0, \\ g^{\bar{3}\bar{L}} &= -\vartheta^{-1}g_{\bar{K}}^{\bar{3}}A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, & g_{\bar{L}}^3 &= \vartheta^{-1}g_{\bar{K}}^{\bar{3}}A_{\bar{L}}^K, \\ g^{3\bar{3}} &= g^{\bar{3}\bar{3}} = h^{-2} = g_{\bar{3}\bar{3}}^{-1}, & g_3^3 &= 1. \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

### 2.3.2.3 Вектор $\mathbf{h}$ перпендикулярен к основной базовой поверхности и координатные линии на ней являются линиями кривизны

Прежде чем выписать в рассматриваемом случае выражения для компонент переноса ЕТВР, вспомним кое-что из дифференциальной геометрии, касающееся линий кривизны на поверхности. Во первых, они ортогональные линии и, во вторых, вектор Родрига

(производная от единичного вектора нормали к поверхности по естественному параметру (дуге) этой линии) и единичный вектор касательной к той же линии коллинеарны. Кроме того, линия кривизны в каждой точке имеет направление, совпадающее с одним из главных направлений поверхности в этой же точке и геодезическое кручение линии кривизны равно нулю [2, 6, 20].

Обозначим единичный вектор нормали к поверхности  $\overset{(-)}{S}$  через  $\overset{(-)}{\mathbf{n}}$ , единичный вектор касательной к линии кривизны на этой поверхности через  $\overset{(-)}{\mathbf{s}}$ , а естественный параметр по этой линии через  $\overset{(-)}{s}$ . Тогда имеем

$$\frac{d\overset{(-)}{\mathbf{n}}}{d\overset{(-)}{\mathbf{s}}} = \frac{d\overset{(-)}{\mathbf{n}}}{dx^I} \frac{dx^I}{d\overset{(-)}{s}} = \partial_I \overset{(-)}{\mathbf{n}} \overset{(-)}{s}^I = -k_s \overset{(-)}{\mathbf{s}}, \quad (2.3.28)$$

где  $k_s$  — нормальная кривизна поверхности в рассматриваемой точке, а  $\overset{(-)}{s}^I = \mathbf{r}^I \cdot \overset{(-)}{\mathbf{s}} = dx^I / d\overset{(-)}{s}$ .

Нетрудно заметить, что для выражения линий кривизн  $x^I$  (2.3.28) можно представить в виде

$$\overset{(-)}{s}_{(I)}^I \partial_I \overset{(-)}{\mathbf{n}} = -k_I \overset{(-)}{\mathbf{s}}_{(I)}, \quad \overset{(-)}{s}_{(I)}^I = \frac{dx^I}{d\overset{(-)}{s}_{(I)}} = \overset{(-)}{\mathbf{s}}_{(I)} \cdot \mathbf{r}^I, \quad < I = 1, 2 >.$$

Откуда имеем

$$\frac{dx^I}{d\overset{(-)}{s}_{(I)}} \partial_I \overset{(-)}{\mathbf{n}} = -k_I \frac{d\mathbf{r}}{d\overset{(-)}{s}_{(I)}} = -k_I \mathbf{r}_I \frac{dx^I}{d\overset{(-)}{s}_{(I)}}, \quad < I = 1, 2 >,$$

т.е.

$$\partial_I \overset{(-)}{\mathbf{n}} = -k_I \mathbf{r}_I, \quad < I = 1, 2 >. \quad (2.3.29)$$

Здесь  $k_I$  — главная кривизна поверхности  $\overset{(-)}{S}$  в направлении  $\mathbf{r}_I$ .

Далее представим компоненты переноса ЕТВР  $g_{IJ}^+$ ,  $g_I^J$  в удобном виде. В силу определения  $g_{IJ}^+$  и (2.1.3) имеем

$$\begin{aligned} g_{IJ}^+ &= \mathbf{r}_I \cdot \mathbf{r}_J = [\partial_I (\mathbf{h} + \overset{(-)}{\mathbf{r}})] \cdot \mathbf{r}_J = \partial_I \mathbf{h} \cdot \mathbf{r}_J + g_{IJ}^- = \partial_I (\overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_J) + g_{IJ}^- = \\ &= \partial_I h (\overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_J) + h (\partial_I \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_J) + g_{IJ}^- = h (\partial_I \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_J) + g_{IJ}^-, \end{aligned}$$

где учтено, что  $\overset{(-)}{\mathbf{n}} \perp \mathbf{r}_J$ .

Таким образом,

$$g_{IJ}^+ = h (\partial_I \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_J) + g_{IJ}^-, \quad g_I^J = g^{JK} g_{IK}^+ = h (\partial_I \overset{(-)}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}^J) + g_I^J. \quad (2.3.30)$$

Учитывая (2.3.29) в (2.3.30), получим их искомые представления

$$g_{IJ}^{(-)} = (1 - h \overset{(-)}{k}_I) g_{II}^{(-)}, \quad g_I^{\bar{J}} = (1 - h \overset{(-)}{k}_I) g_I^{\bar{J}}, \quad < I = 1, 2 >. \quad (2.3.31)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае в силу первого соотношения (2.3.31)  $g_{12}^{(-)} = 0$  и число независимых основных компонент ETBP (2.3.13) уменьшится на одно, становясь равным 5. Таким образом, в этом случае имеем следующие независимые основные компоненты ETBP:  $g_{11}^{(-)}$ ,  $g_{22}^{(-)}$ ,  $g_{33}^{(-)}$ ,  $g_{11}^{+}$ ,  $g_{22}^{+}$ . Кроме того, если на основной базовой поверхности гауссова координаты являются изометрическими, то  $g_{11}^{(-)} = g_{22}^{(-)}$  и, очевидно, число независимых основных компонент ETBP уменьшится еще на одно, становясь равным 4. В этом случае в качестве независимых основных компонент ETBP можно рассматривать, например,  $g_{11}^{(-)}$ ,  $g_{33}^{(-)}$ ,  $g_{11}^{+}$ ,  $g_{22}^{+}$ .

Теперь нетрудно найти выражения для компонент переноса ETBP  $g_{mn}^{\bar{n}}$ ,  $g_m^{\bar{n}}$ . В самом деле, учитывая (2.3.10) и (2.3.31) из (2.3.14) получаем

$$\begin{aligned} g_{II}^{\bar{I}} &= g_{II}^{(-)} \left[ 1 + x^3 (g_I^{\bar{I}} - 1) \right], \quad < I = 1, 2 >, \quad g_I^{\bar{I}} = 1 + x^3 (g_I^{\bar{I}} - 1), \quad < I = 1, 2 >, \\ g_{IJ}^{\bar{J}} &= 0, \quad I \neq J, \quad g_I^{\bar{J}} = 0, \quad I \neq J, \\ g_{I3}^{\bar{3}} &= x^3 g_{I3}^{(-)} = x^3 h^2 \partial_I \ln h, \quad g_I^{\bar{3}} = x^3 g_I^{\bar{3}} = x^3 \partial_I \ln h, \\ g_{3J}^{\bar{J}} &= g_{3J}^{(-)} = 0, \quad g_3^{\bar{J}} = g_3^{\bar{J}}, \\ g_{33}^{\bar{3}} &= g_{33}^{(-)} = h^2, \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Заметим, что из (2.3.25) легко получаем

$$(x^3)_I = \left( 1 - g_I^{\bar{I}} \right)^{-1}, \quad < I = 1, 2 > \quad (2.3.33)$$

и, учитывая (2.3.33), квадратный трехчлен (2.3.22) представится в виде

$$\overset{(-)}{\vartheta} = \left[ 1 + x^3 (g_1^{\bar{1}} - 1) \right] \left[ 1 + x^3 (g_2^{\bar{2}} - 1) \right]. \quad (2.3.34)$$

Теперь нетрудно получить выражения и для компонент переноса ETBP  $g^{k\bar{l}}$ ,  $g_{\bar{l}}^k$ . В самом деле, в силу (2.3.31) и (2.3.34) из (2.3.18) имеем

$$\begin{aligned} a_{\bar{1}}^{\bar{1}} &= g_{\bar{2}}^{\bar{2}} - 1, \quad a_{\bar{2}}^{\bar{2}} = g_{\bar{1}}^{\bar{1}} - 1; \quad a_{\bar{I}}^{\bar{J}} = 0, \quad I \neq J, \\ A_{\bar{1}}^{\bar{1}} &= 1 + x^3 (g_{\bar{2}}^{\bar{2}} - 1), \quad A_{\bar{2}}^{\bar{2}} = 1 + x^3 (g_{\bar{1}}^{\bar{1}} - 1); \quad A_{\bar{K}}^{\bar{I}} = 0, \quad I \neq K \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

и, учитывая соотношения второй строки (2.3.35) в (2.3.20), получим искомые соотношения

$$\begin{aligned}
 g^{K\bar{K}} &= \left[1 + x^3(g_{\frac{+}{K}}^{\bar{K}} - 1)\right]^{-1} g^{\bar{K}\bar{K}}, & g_{\frac{-}{K}}^K &= \left[1 + x^3(g_{\frac{+}{K}}^{\bar{K}} - 1)\right]^{-1}, \\
 g^{K\bar{L}} &= 0, \quad K \neq L, & g_{\frac{-}{L}}^K &= 0, \quad K \neq L, \\
 g^{K\bar{3}} &= 0, & g_{\frac{-}{3}}^K &= 0, \\
 g^{3\bar{K}} &= -x^3 \left[1 + x^3(g_{\frac{+}{K}}^{\bar{K}} - 1)\right]^{-1} g_{\frac{+}{K}}^{\bar{3}} g^{\bar{K}\bar{K}}, & g_{\frac{-}{K}}^3 &= -x^3 \left[1 + x^3(g_{\frac{+}{K}}^{\bar{K}} - 1)\right]^{-1} g_{\frac{+}{K}}^{\bar{3}}, \\
 g^{3\bar{3}} &= g^{\bar{3}\bar{3}} = h^{-2}, & g_{\frac{-}{3}}^3 &= g_{\frac{-}{3}}^{\bar{3}} = 1, \\
 < K = 1, 2 >; & & < K = 1, 2 >.
 \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

Здесь, конечно,  $g_{\frac{+}{K}}^{\bar{3}} = \partial_K \ln h$ .

Следует заметить, что имея выражения для компонент переноса ETBP, не представляет большого труда найти выражения и для компонент  $g_{pq}$  и  $g^{pq}$  ETBP, которые в силу (2.1.13) представляются в виде

$$g_{pq} = g_p^{\bar{n}} g_{nq}^-, \quad g^{pq} = g^{p\bar{m}} g_{\bar{m}q}^-. \tag{2.3.37}$$

Не останавливаясь на подробных представлениях (2.3.37) во всех рассмотренных выше случаях, приведем их выражения только, когда вектор  $\mathbf{h}$  перпендикулярен к основной базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$  и при этом координатные линии на ней являются линиями кривизны. На основании (2.3.32) и (2.3.36) из (2.3.37) получаем соответственно

$$\begin{aligned}
 g_{II} &= g_{\frac{-}{I}\frac{-}{I}} \left[1 + x^3(g_{\frac{+}{I}}^{\bar{I}} - 1)\right]^2 + (x^3 \partial_I h)^2, \quad < I = 1, 2 > \\
 g_{IJ} &= (x^3)^2 \partial_I h \partial_J h, \quad I \neq J, \quad g_{I3} = x^3 h \partial_I h, \quad g_{33} = h^2; \\
 g^{K\bar{K}} &= g^{\bar{K}\bar{K}} \left[1 + x^3(g_{\frac{+}{K}}^{\bar{K}} - 1)\right]^{-2}, \quad g^{K3} = -x^3 g^{\bar{K}\bar{K}} g_{\frac{+}{K}}^{\bar{3}} \left[1 + x^3(g_{\frac{+}{K}}^{\bar{K}} - 1)\right]^{-2}, \quad < K = 1, 2 > \\
 g^{12} &= 0, \quad g^{33} = h^{-2} + (x^3)^2 \left\{ g_{\frac{+}{1}}^{\bar{1}} \left(g_{\frac{+}{1}}^{\bar{3}}\right)^2 \left[1 + x^3(g_{\frac{+}{1}}^{\bar{1}} - 1)\right]^{-2} + g_{\frac{+}{2}}^{\bar{2}} \left(g_{\frac{+}{2}}^{\bar{3}}\right)^2 \left[1 + x^3(g_{\frac{+}{2}}^{\bar{2}} - 1)\right]^{-2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.3.38}$$

## 2.4 Выражение различных семейств символов Кристоффеля через основные компоненты ETBP

Ограничимся рассмотрением  $\overset{(\sim)}{S}_{(g)}$ -семейств символов Кристоффеля,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , а за основную базовую примем внутреннюю базовую поверхность  $S$ . Тогда по определению 1.36 основными компонентами ETBP слоя  $\alpha$  являются компоненты  $g_{p\bar{q}}$ ,  $g_{\frac{-}{p}}^{\bar{q}}$ ,  $g_{\frac{-}{p}}^{\bar{p}\bar{q}}$  и компоненты

переноса  $g_{\frac{+}{p}\bar{q}}$ ,  $g_{\frac{+}{p}}^{\bar{q}}$  и задача заключается в выражении символов Кристоффеля (2.1.28) через них. С целью разрешения этой задачи разобьем ее на две задачи:

1. Выразим  $\overset{(\sim)}{S}_{(g)}$ -семейства символов Кристоффеля,  $\sim \in \{-, +\}$ , через основные компоненты ETBP.
2. Выразим  $S_g$ -семейства символов Кристоффеля через основные компоненты ETBP.

### 2.4.1 Выражение семейств символов Кристоффеля относительно базисов, связанных с лицевыми поверхностями, через основные компоненты ЕТВР

По определениям (2.1.28) для  $\overset{(\sim)}{S}_{(g)}$ -семейств символов Кристоффеля,  $\sim \in \{-, +\}$ , будем иметь

$$\Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}} = \mathbf{r}_{\check{p}\check{q}} \cdot \mathbf{r}_{\check{l}}, \quad \Gamma_{\check{p}\check{q}}^{\check{k}} = \mathbf{r}_{\check{p}\check{q}} \cdot \mathbf{r}^{\check{k}} = g^{\check{k}\check{l}} \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (2.4.1)$$

Заметим, что

$$\partial_Q \mathbf{r}_{\check{P}} = \partial_P \mathbf{r}_{\check{Q}}, \partial_3 \mathbf{r}_{\check{P}} = 0, \partial_Q \mathbf{r}_{\check{3}} \neq 0, \partial_3 \mathbf{r}_{\check{P}} \neq \partial_P \mathbf{r}_{\check{3}}, \sim \in \{-, +\}, \quad (2.4.2)$$

а в силу (2.1.3), (2.1.7) и (2.1.12) аналог формулы Вейнгартена представится в виде

$$\partial_p \mathbf{h} = \mathbf{r}_{\check{p}}^+ - \mathbf{r}_{\check{p}}^- = (g_{\check{p}}^{\check{q}} - g_{\check{p}}^{\check{q}}) \mathbf{r}_{\check{q}} = (g_{\check{p}\check{q}}^+ - g_{\check{p}\check{q}}^-) \mathbf{r}^{\check{q}}, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.4.3)$$

Нетрудно заметить, что

$$\Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}} \sim (\Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{L}}, \Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{3}}, \Gamma_{\check{3}\check{Q},\check{l}}, \Gamma_{\check{p}\check{3},\check{l}}), \quad \sim \in \{-, +\}.$$

На основании второго соотношения (2.4.2), (2.4.3) и определения (2.4.1) легко показать, что

$$\Gamma_{\check{p}\check{3},\check{l}} = \mathbf{r}_{\check{p}\check{3}} \cdot \mathbf{r}_{\check{l}} = 0, \quad \Gamma_{\check{3}\check{Q},\check{l}} = g_{\check{Q}\check{l}}^+ - g_{\check{Q}\check{l}}^-, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (2.4.4)$$

Кроме того,

$$\Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{L}} = \frac{1}{2}(-\partial_L g_{\check{P}\check{Q}} + \partial_P g_{\check{Q}\check{L}} + \partial_Q g_{\check{L}\check{P}}) = \bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad (2.4.5)$$

где, по соотношению первой строки (2.1.29)  $\bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}}$  —  $\overset{(\sim)}{S}$ -семейства символов Кристоффеля первого рода.

Далее на основании определения (2.4.1) и (2.4.3) имеем

$$\Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{3}} = \partial_Q \mathbf{r}_{\check{P}} \cdot \mathbf{h} = \partial_Q (\mathbf{r}_{\check{P}} \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{r}_{\check{P}} \cdot \mathbf{h}_Q = \partial_Q g_{\check{P}\check{3}} - g_{\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\check{Q}\check{P}}^-, \quad \sim \in \{-, +\}$$

и отсюда, учитывая второе соотношение (2.4.2), легко получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{3}} &= \Gamma_{\check{Q}\check{P},\check{3}} = \frac{1}{2} \left( \partial_P g_{\check{Q}\check{3}} + \partial_Q g_{\check{P}\check{3}} - g_{\check{P}\check{Q}}^+ - g_{\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\check{P}\check{Q}}^- + g_{\check{Q}\check{P}}^- \right) = \\ &= \partial_Q g_{\check{P}\check{3}} - g_{\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\check{Q}\check{P}}^-, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Не представляет большого труда найти выражения и для символов Кристоффеля второго рода. В самом деле, нетрудно заметить, что

$$\Gamma_{\check{p}\check{q}}^{\check{k}} \sim (\bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q}}^{\check{k}}, \Gamma_{\check{3}\check{Q}}^{\check{k}}, \Gamma_{\check{p}\check{3}}^{\check{k}})$$

и на основании определения (2.4.1) и (2.4.4)–(2.4.6) будем иметь

$$\begin{aligned} \Gamma_{\check{P}\check{Q}}^{\check{k}} &= g^{\check{k}\check{l}} \Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{l}} = g^{\check{k}\check{3}} (\partial_P g_{\check{Q}\check{3}} - g_{\check{P}\check{Q}}^+ + g_{\check{P}\check{Q}}^-) + g^{\check{k}\check{L}} \bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}}, \\ \Gamma_{\check{3}\check{Q}}^{\check{k}} &= g_{\check{Q}}^{\check{k}} - g_{\check{Q}}^{\check{k}}, \quad \Gamma_{\check{p}\check{3}}^{\check{k}} = 0, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Из полученных выше соотношений этого раздела при  $\sim = -$  получаются соответствующие соотношения работы [18].

## 2.4.2 Выражение $S_g$ -семейства символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР

Рассмотрим два способа нахождения выражений для  $S_g$ -семейства символов Кристоффеля. Первый заключается в нахождении связей между  $S_g$ - и  $\overset{(\sim)}{S}_g$ -семействами символов Кристоффеля таким образом, что  $S_g$ -семейство символов оказалось бы определенным посредством  $\overset{(\sim)}{S}_g$ -семейств символов, а второй — в определении  $S_g$ -семейства символов непосредственно через компоненты переноса ЕТВР.

В первом случае по более общим соотношениям (2.2.3) остается только лишь выписать искомые связи. В самом деле, при  $\sim = \emptyset$ ,  $\beta = \alpha$  из (2.2.3) получаем

$$\begin{aligned}\Gamma_{pq,l} &= g_{l\check{n}} \left( \partial_q g_{\check{p}} + g_{\check{p}}^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}\check{q}}^{\check{n}} \right) = g_l^{\check{n}} \left( \partial_q g_{p\check{n}} - g_p^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}\check{q},\check{m}}^{\check{n}} \right), \\ \Gamma_{pq}^s &= g^{sl} \Gamma_{pq,l} = g_{\check{n}}^s \left( \partial_q g_p^{\check{n}} + g_p^{\check{m}} \Gamma_{\check{m}\check{q}}^{\check{n}} \right) = g^{s\check{n}} \left( \partial_q g_{p\check{n}} - g_p^{\check{m}} \Gamma_{\check{n}\check{q},\check{m}}^{\check{n}} \right), \\ \sim, \check{\sim} &\in \{-, +\}, \forall \alpha.\end{aligned}\quad (2.4.8)$$

Далее учитывая (2.1.11) и (2.4.4) — (2.4.6) подходящим образом в (2.4.8), окончательно получим искомые выражения для  $S_g$ -семейств символов Кристоффеля, на выписывании которых останавливаться не будем.

Во втором способе нахождения выражения для  $S_g$ -семейств символов Кристоффеля поступаем следующим образом: сначала выписываем представления  $S_g$ -семейств символов Кристоффеля через  $S_g$ -семейства компонент ЕТВР, а затем учитываем по (2.1.14) то, что  $g_{rs} = g_{r\check{n}} g_s^{\check{n}}$ ,  $\sim \in \{-, +\}$ . В результате, например, для  $S_g$ -семейств символов Кристоффеля первого рода будем иметь

$$\begin{aligned}\Gamma_{pq,l} &= \frac{1}{2} \left( -\partial_l g_{pq} + \partial_p g_{ql} + \partial_q g_{lp} \right) = \frac{1}{2} \left[ -\partial_l (g_{p\check{n}} g_q^{\check{n}}) + \partial_p (g_{q\check{n}} g_l^{\check{n}}) + \partial_q (g_{l\check{n}} g_p^{\check{n}}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ -(\partial_l g_{p\check{n}}) g_q^{\check{n}} - g_{p\check{n}} \partial_l g_q^{\check{n}} + (\partial_p g_{q\check{n}}) g_l^{\check{n}} + g_{q\check{n}} \partial_p g_l^{\check{n}} + (\partial_q g_{l\check{n}}) g_p^{\check{n}} + g_{l\check{n}} \partial_q g_p^{\check{n}} \right], \\ \sim &\in \{-, +\}.\end{aligned}\quad (2.4.9)$$

Теперь, подставляя (2.1.11) в (2.4.9), получим искомое выражение. Однако с целью сокращения письма подставим выражения (2.1.11) не для всех компонент переноса, а только для тех, которые стоят под операцией дифференцирования. В результате получим

$$\begin{aligned}\Gamma_{pq,l} &= \frac{1}{2} \left\{ -\left\{ \partial_l g_{\check{p}\check{n}} + \partial_l [x^3 (g_{\check{p}\check{n}} - g_{\check{p}\check{n}})] \right\} g_q^{\check{n}} - g_{p\check{n}} \partial_l [x^3 (g_{\check{q}\check{l}}^{\check{n}} - g_{\check{q}\check{l}}^{\check{n}})] + \right. \\ &\quad + \left\{ \partial_p g_{\check{q}\check{n}} + \partial_p [x^3 (g_{\check{q}\check{n}} - g_{\check{q}\check{n}})] \right\} g_l^{\check{n}} + g_{q\check{n}} \partial_p [x^3 (g_{\check{l}\check{l}}^{\check{n}} - g_{\check{l}\check{l}}^{\check{n}})] \} + \\ &\quad \left. + \left\{ \partial_q g_{\check{l}\check{n}} + \partial_q [x^3 (g_{\check{l}\check{n}} - g_{\check{l}\check{n}})] \right\} g_p^{\check{n}} + g_{l\check{n}} \partial_q [x^3 (g_{\check{p}\check{p}}^{\check{n}} - g_{\check{p}\check{p}}^{\check{n}})] \right\}, \quad \sim \in \{-, +\}.\end{aligned}\quad (2.4.10)$$

Видно, что в связи с громоздкостью записи соотношения (2.4.10) предпочтительно пользоваться соотношениями (2.4.8).

Следует заметить, что, например, в силу первого соотношения (2.4.8) получаем

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}} &= \Gamma'_{\check{q}\check{p},\check{l}} = g_{\check{q}}^{\check{3}} \Gamma_{\check{3}\check{p},\check{l}} + \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}} = g_{\check{p}}^{\check{3}} \Gamma_{\check{3}\check{q},\check{l}} + \Gamma_{\check{q}\check{p},\check{l}} = \\ &= \frac{1}{2} (g_{\check{p}}^{\check{3}} \Gamma_{\check{3}\check{q},\check{l}} + g_{\check{q}}^{\check{3}} \Gamma_{\check{3}\check{p},\check{l}} + \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}} + \Gamma_{\check{q}\check{p},\check{l}}), \quad \sim \in \{-, +\}, \\ \Gamma_{pq,l} \Big|_{\substack{x^3=0 \\ (\sim=-)}} &= \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}}, \quad \Gamma_{pq,l} \Big|_{\substack{x^3=1 \\ (\sim=+)}} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}},\end{aligned}$$

где

$$\Gamma_{pq,l}|_{x^3=0} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},l}|_{\sim=-} = \Gamma'_{\bar{p}\bar{q},\bar{l}}, \quad \Gamma_{pq,l}|_{x^3=1} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},l}|_{\sim=+} = \Gamma'_{\hat{p}\hat{q},\hat{l}}$$

Отсюда в свою очередь легко заключаем, что

$$\Gamma'_{\check{p}\check{q},l} \neq \Gamma_{pq,l}, \quad \Gamma'_{\check{P}\check{Q},l} = \Gamma_{\check{P}\check{Q},l}, \quad \sim \in \{-, +\}.$$

## 2.5 Представление компонент вторых тензоров поверхностей посредством основных компонент ЕТВР

Зная выражения различных семейств символов Кристоффеля, не представляет большого труда нахождение представлений компонент вторых тензоров поверхностей  $\overset{(\sim)}{S}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , через основные компоненты ЕТВР. В самом деле, по определению [2, 22] компоненты вторых тензоров поверхностей  $\overset{(\sim)}{S}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , представляются в виде

$$\overset{(\sim)}{b}_{\tilde{P}\tilde{Q}} = \frac{1}{\sqrt{g^{\tilde{3}\tilde{3}}}} \Gamma_{\tilde{P}\tilde{Q}}^{\tilde{3}} = \sqrt{g^{\tilde{3}\tilde{3}}} \Gamma_{\tilde{P}\tilde{Q},\tilde{3}} + (g^{\tilde{3}\tilde{L}}/\sqrt{g^{\tilde{3}\tilde{3}}}) \bar{\Gamma}_{\tilde{P}\tilde{Q},\tilde{L}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.5.1)$$

### 2.5.1 Представление компонент второго тензора поверхности $S$ посредством основных компонент ЕТВР

Подставляя подходящие выражения для символов Кристоффеля, получаемые на основании (2.4.8) и (2.4.10), поочередно в (2.5.1), будем иметь соответствующие представления для компонент второго тензора поверхности  $S$ . Однако с целью сокращения письма всех их выписывать не будем. Выпишем компоненты второго тензора поверхности  $S$  посредством основных компонент ЕТВР в том случае, когда за основную базовую поверхность принимается внутренняя базовая поверхность  $\overset{(-)}{S}$ . В этой связи, представляя (2.5.1) в виде

$$b_{IJ} = (1/\sqrt{g^{33}}) \Gamma_{IJ}^3 = \frac{1}{2\sqrt{g^{33}}} g^{3k} (-\partial_k g_{IJ} + \partial_I g_{Jk} + \partial_J g_{Ik})$$

и учитывая (2.1.14), после простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} b_{IJ} = & \frac{1}{2} \sqrt{g^{33}} [(1-x^3)(\partial_J g_{I\bar{3}} + \partial_I g_{J\bar{3}} + 2g_{\bar{I}\bar{J}}) - (1-2x^3)(g_{\bar{I}J} + g_{I\bar{J}}) + \\ & + x^3(\partial_J g_{I\bar{3}} + \partial_I g_{J\bar{3}} - 2g_{\bar{I}\bar{J}})] + \\ & + \frac{1}{2} (g^{K3}/\sqrt{g^{33}}) [(1-x^3)^2 (\partial_I g_{J\bar{K}} + \partial_J g_{I\bar{K}} - \partial_K g_{I\bar{J}}) + \\ & + x^3(1-x^3)(\partial_I g_{J\bar{K}} + \partial_J g_{I\bar{K}} + \partial_I g_{J\bar{K}} + \partial_J g_{I\bar{K}} - \partial_K g_{I\bar{J}} - \partial_K g_{J\bar{I}}) + \\ & + (x^3)^2 (\partial_I g_{K\bar{I}} + \partial_J g_{K\bar{I}} - \partial_K g_{I\bar{J}})]. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Учитывая  $g_{\bar{p}\bar{q}} = \bar{g}_{\bar{p}}^n g_{\bar{q}n}$  и, кроме того, выражения  $g^{33}$  и  $g^{K3}$  через основные компоненты ЕТВР, окончательно получим искомое представление для  $b_{IJ}$ .

### 2.5.2 Представление компонент вторых тензоров лицевых поверхностей посредством основных компонент ЕТВР

Учитывая (2.4.6) и (2.4.7), из (2.5.1) при  $\sim = \sim \in \{-, +\}$  получаем искомые представления для компонент вторых тензоров поверхностей  $\overset{(\sim)}{S}$ ,  $\sim \in \{-, +\}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \overset{(\sim)}{b}_{PQ} &= \frac{1}{2} \sqrt{g^{33}} \left( \partial_P g_{Q3} + \partial_Q g_{P3} - g_{+PQ}^+ - g_{-PQ}^- + g_{+QP}^+ + g_{-QP}^- \right) + \left( g^{3L}/\sqrt{g^{33}} \right) \bar{\Gamma}_{PQ,L} = \\ &= \sqrt{g^{33}} \left( \partial_Q g_{P3} - g_{+QP}^+ + g_{-QP}^- \right) + \left( g^{3L}/\sqrt{g^{33}} \right) \bar{\Gamma}_{PQ,L} = \\ &= \sqrt{g^{33}} \left( \partial_P g_{Q3} - g_{+PQ}^+ + g_{-PQ}^- \right) + \left( g^{3L}/\sqrt{g^{33}} \right) \bar{\Gamma}_{PQ,L}, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Следует заметить, что (2.5.3) при  $\sim = -$  ( $\sim = +$ ) можно еще получить из (2.5.2) при  $x^3 = 0$  ( $x^3 = 1$ ).

Теперь рассмотрим частные случаи:

a. Вектор  $\mathbf{h}$  перпендикулярен к внутренней базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$ . В этом случае выполняются условия (2.3.8) и поэтому, как легко усмотреть, из (2.5.3) при  $\sim = -$  получаем

$$\overset{(-)}{b}_{PQ} = \frac{1}{2} \sqrt{g^{33}} \left( 2g_{-PQ}^- - g_{+PQ}^+ - g_{+QP}^- \right) = \sqrt{g^{33}} \left( g_{-QP}^- - g_{+QP}^- \right) = \sqrt{g^{33}} \left( g_{-PQ}^- - g_{+PQ}^+ \right). \quad (2.5.4)$$

Нетрудно заметить, что из (2.5.4) следует (2.3.11).

С целью сокращения письма в рассматриваемом случае на выписывании (2.5.2) останавливаются не будем.

b. Вектор  $\mathbf{h}$  перпендикулярен к внутренней базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$  и область тонкого тела имеет постоянную толщину ( $h = |\mathbf{h}| = \text{const}$ ). Нетрудно увидеть, что в рассматриваемом случае имеет место (2.3.10) и так как  $h = \text{const}$ , из них получаем

$$g_{I3}^+ = h^2 \partial_I \ln h = 0, \quad g_I^3 = \partial_I \ln h = 0 \quad \text{при } \mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}, \quad h = |\mathbf{h}| = \text{const}. \quad (2.5.5)$$

Учитывая эти последние соотношения из соответствующих соотношений (2.3.26) и (2.3.27) имеем

$$g_P^3 = x^3 g_P^3 = 0, \quad g_K^3 = 0, \quad g^{33} = g^{3n} g_n^3 = g^{33}. \quad (2.5.6)$$

В силу (2.5.1) при  $\sim = -$  и (2.5.6) из второго соотношения (2.4.8) при  $\sim = -$  получаем

$$\Gamma_{PQ}^3 = g_P^M \Gamma_{PQ}^{\bar{M}}. \quad (2.5.7)$$

Подставляя (2.5.7) в (2.5.1) при  $\sim = \emptyset$  и учитывая последнее соотношение (2.5.6), получаем

$$b_{PQ} = g_P^{\bar{M}} b_{\bar{M}Q}^{(-)} = g_{P\bar{M}}^{(-)} b_{\bar{Q}}^{\bar{M}} = g_P^N b_{NQ}^{(+)} = g_{PN}^+ b_Q^+,$$

где последние два равенства получаются аналогично.

Из последнего соотношения имеем

$$b_Q^P = g^{PK} b_{KQ} = g^{PM} \overset{(-)}{b}_{\bar{M}\bar{Q}} = g_{\bar{M}}^P \overset{(-)}{b}_{\bar{Q}} = g^{PN} \overset{(+)}{b}_{\bar{N}\bar{Q}} = g_{\bar{N}}^P \overset{(+)}{b}_{\bar{Q}}.$$

Легко усмотреть, что последние два соотношения можно представить в следующих кратких формах:

$$b_{PQ} = g_{\check{P}}^{\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{M}\check{Q}} = g_{P\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{Q}}^{\check{M}}, \quad b_Q^P = g^{PK} b_{KQ} = g^{P\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{M}\check{Q}} = g_{\check{M}}^P \overset{(\sim)}{b}_{\check{Q}}, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (2.5.8)$$

Получим обратные к (2.5.8) соотношения. Умножая, например, первое равенство первого соотношения (2.5.8) на  $g_L^P$  с последующим суммированием по P и учитывая соотношение (2.1.13) получаем

$$(g_{\check{L}}^P g_{\check{P}}^{\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{M}\check{Q}} = g_{\check{L}}^P b_{PQ}) \Rightarrow (g_{\check{L}}^{\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{M}\check{Q}} = g_{\check{L}}^P b_{PQ}) \Rightarrow (\overset{(\sim)}{b}_{\check{L}\check{Q}} = g_{\check{L}}^P b_{PQ}).$$

Таким образом,

$$(\overset{(\sim)}{b}_{\check{P}\check{Q}} = g_{\check{P}}^L b_{LQ} = g_{\check{P}L} b_Q^L) \Rightarrow (\overset{(\sim)}{b}_{\check{Q}}^{\check{P}} = g^{\check{P}\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{M}\check{Q}} = g^{\check{P}L} b_{LQ} = g_{\check{L}}^{\check{P}} b_Q^L), \quad \sim \in \{-, +\} \quad (2.5.9)$$

и верны соотношения

$$(\overset{(\sim)}{b}_{\check{P}\check{Q}} = g_{\check{P}}^{\check{L}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{L}\check{Q}} = g_{\check{P}\check{L}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{Q}}^{\check{L}}) \Rightarrow (\overset{(\sim)}{b}_{\check{Q}}^{\check{P}} = g^{\check{P}\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{M}\check{Q}} = g^{\check{P}\check{L}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{L}\check{Q}} = g_{\check{L}}^{\check{P}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{Q}}^{\check{L}}), \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (2.5.10)$$

Очевидно, соотношения (2.5.10) содержат (2.5.8) и (2.5.9).

Теперь, учитывая, что в силу первого соотношения (2.5.5)  $\mathbf{h}$  перпендикулярен и поверхности  $S$  ( $\mathbf{h} \perp S$ ), аналогично (2.5.4) из (2.5.3) получаем

$$\overset{(+)}{b}_{\bar{P}\bar{Q}} = \frac{1}{2} \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \left( g_{\bar{P}\bar{+}} + g_{\bar{Q}\bar{+}} - 2g_{\bar{P}\bar{Q}} \right) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \left( g_{\bar{P}\bar{+}} - g_{\bar{P}\bar{Q}} \right) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} \left( g_{\bar{Q}\bar{+}} - g_{\bar{Q}\bar{P}} \right). \quad (2.5.11)$$

Соотношения (2.5.4) и (2.5.11) можно объединить и записать одним соотношением

$$\begin{aligned} \overset{(\sim)}{b}_{\check{P}\check{Q}} &= \frac{1}{2} \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} \left( g_{\check{P}\check{+}} + g_{\check{Q}\check{+}} - g_{\check{P}\check{Q}} - g_{\check{Q}\check{P}} \right) = \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} \left( g_{\check{P}\check{+}} - g_{\check{P}\check{Q}} \right) = \\ &= \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} \left( g_{\check{Q}\check{+}} - g_{\check{Q}\check{P}} \right), \quad \sim \in \{-, +\}, \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

непосредственно следующим еще из (2.5.3).

### 2.5.2.1 Представление средних и гауссовых кривизн поверхностей посредством основных компонент ETBP

Имея выражения для вторых тензоров поверхностей через основные компоненты ETBP, не представляет большого труда найти аналогичные представления для средних и гауссовых кривизн тех же поверхностей. В самом деле, обозначая средние и гауссовые кривизны

поверхностей  $\overset{(\sim)}{S}$  через  $\overset{(\sim)}{H}$  и  $\overset{(\sim)}{K}$  соответственно, где  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , по их определениям [2, 6, 20, 22] будем иметь

$$\begin{aligned} 2\overset{(\sim)}{H} &= \overset{(\sim)}{k}_1 + \overset{(\sim)}{k}_2 = \overset{(\sim)}{b}_{\overset{(\sim)}{I}} = \overset{(\sim)}{g}^{\overset{(\sim)}{I}\overset{(\sim)}{J}} \overset{(\sim)}{b}_{\overset{(\sim)}{I}\overset{(\sim)}{J}} = (1/\sqrt{g^{33}}) g^{\overset{(\sim)}{I}\overset{(\sim)}{J}} \Gamma_{\overset{(\sim)}{I}\overset{(\sim)}{J}}^3, \\ \overset{(\sim)}{K} &= \overset{(\sim)}{k}_1 \overset{(\sim)}{k}_2 = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{C}^{\overset{(\sim)}{I}\overset{(\sim)}{J}} \overset{(\sim)}{C}_{\overset{(\sim)}{L}\overset{(\sim)}{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\overset{(\sim)}{I}} \overset{(\sim)}{b}_{\overset{(\sim)}{J}} = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{C}^{\overset{(\sim)}{I}\overset{(\sim)}{J}} \overset{(\sim)}{C}^{\overset{(\sim)}{L}\overset{(\sim)}{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\overset{(\sim)}{I}\overset{(\sim)}{L}} \overset{(\sim)}{b}_{\overset{(\sim)}{J}\overset{(\sim)}{M}} = \\ &= (1/(2g^{33})) \overset{(\sim)}{C}^{\overset{(\sim)}{I}\overset{(\sim)}{J}} \overset{(\sim)}{C}^{\overset{(\sim)}{L}\overset{(\sim)}{M}} \Gamma_{\overset{(\sim)}{I}\overset{(\sim)}{L}}^3 \Gamma_{\overset{(\sim)}{J}\overset{(\sim)}{M}}^3, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

где  $\overset{(\sim)}{k}_1$  и  $\overset{(\sim)}{k}_2$  — главные кривизны поверхности  $\overset{(\sim)}{S}$ , а  $\overset{(\sim)}{C}^{\overset{(\sim)}{I}\overset{(\sim)}{J}} = \overset{(\sim)}{C}^{\overset{(\sim)}{I}\overset{(\sim)}{J}3} = (\mathbf{r}^{\overset{(\sim)}{I}} \times \mathbf{r}^{\overset{(\sim)}{J}}) \cdot \mathbf{r}^3$ ,  $\overset{(\sim)}{C}_{\overset{(\sim)}{L}\overset{(\sim)}{M}} = \overset{(\sim)}{C}_{\overset{(\sim)}{L}\overset{(\sim)}{M}3} = (\mathbf{r}^{\overset{(\sim)}{L}} \times \mathbf{r}^{\overset{(\sim)}{M}}) \cdot \mathbf{r}^3$  — компоненты дискриминантного тензора в рассматриваемой точке  $M \in S$ , где  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ .

Для представления средних и гауссовых кривизн поверхностей  $\overset{(\sim)}{S}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , с помощью основных компонент переноса ЕТВР остается лишь соответствующим образом подставить (2.5.2) и (2.5.3) (или выражения символов Кристоффеля  $\Gamma_{\overset{(\sim)}{J}\overset{(\sim)}{J}3}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ , из первого соотношения (2.4.7), а  $\Gamma_{\overset{(\sim)}{I}\overset{(\sim)}{J}}^3$  из второго соотношения (2.4.8)) в (2.5.13), однако с целью сокращения письма в общем случае этими подстановками заниматься не будем. Более подробно рассмотрим случай, когда  $\mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}$  и область тонкого тела имеет постоянную толщину ( $h = |\mathbf{h}| = \text{const}$ ). В этом случае из первого соотношения (2.5.8) с учетом (2.5.12) имеем

$$\begin{aligned} b_{PQ} &= g_P^{\overset{(\sim)}{M}} b_{\overset{(\sim)}{M}Q} = \sqrt{g^{33}} g_P^{\overset{(\sim)}{M}} (g_{\overset{(-)}{Q}\overset{(\sim)}{M}} - g_{\overset{(+)}{Q}\overset{(\sim)}{M}}) = \sqrt{g^{33}} (g_{\overset{(-)}{P}\overset{(-)}{Q}} - g_{\overset{(+)}{P}\overset{(+)}{Q}}) = \\ &= [(1-x^3) g_{\overset{(-)}{P}}^{\overset{(\sim)}{M}} + x^3 g_{\overset{(+)}{P}}^{\overset{(\sim)}{M}}] b_{\overset{(\sim)}{M}Q} = [(1-x^3) b_{\overset{(-)}{P}\overset{(-)}{Q}} + x^3 b_{\overset{(+)}{P}\overset{(+)}{Q}}] = \\ &= (1-x^3) \sqrt{g^{33}} (g_{\overset{(-)}{P}\overset{(-)}{Q}} - g_{\overset{(+)}{P}\overset{(+)}{Q}}) + x^3 \sqrt{g^{33}} (g_{\overset{(+)}{P}\overset{(-)}{Q}} - g_{\overset{(+)}{P}\overset{(+)}{Q}}). \end{aligned}$$

Аналогично из второго соотношения (2.5.8) с учетом (2.5.12) получаем

$$b_Q^P = g^{P\overset{(\sim)}{N}} b_{\overset{(\sim)}{N}Q} = \sqrt{g^{33}} g^{P\overset{(\sim)}{N}} (g_{\overset{(-)}{Q}\overset{(\sim)}{N}} - g_{\overset{(+)}{Q}\overset{(\sim)}{N}}) = \sqrt{g^{33}} (g_{\overset{(-)}{Q}\overset{(-)}{Q}} - g_{\overset{(+)}{Q}\overset{(+)}{Q}}).$$

Таким образом, учитывая, что  $g^{33} = h^{-1}$ , имеем

$$\begin{aligned} b_{PQ} &= h^{-1} (g_{\overset{(-)}{Q}\overset{(-)}{M}} - g_{\overset{(+)}{Q}\overset{(-)}{M}}) = h^{-1} [(1-x^3) (g_{\overset{(-)}{P}\overset{(-)}{Q}} - g_{\overset{(+)}{P}\overset{(-)}{Q}}) + x^3 (g_{\overset{(+)}{P}\overset{(-)}{Q}} - g_{\overset{(+)}{P}\overset{(+)}{Q}})] = \\ &= g_P^{\overset{(\sim)}{M}} b_{\overset{(\sim)}{M}Q} = (1-x^3) b_{\overset{(-)}{P}\overset{(-)}{Q}} + b_{\overset{(+)}{P}\overset{(+)}{Q}}, \\ b_Q^P &= h^{-1} g_P^{\overset{(\sim)}{N}} (g_{\overset{(-)}{Q}\overset{(\sim)}{N}} - g_{\overset{(+)}{Q}\overset{(\sim)}{N}}) = h^{-1} (g_{\overset{(-)}{Q}\overset{(-)}{Q}} - g_{\overset{(+)}{Q}\overset{(+)}{Q}}). \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

Следует заметить, что первое соотношение (2.5.14) легко получается еще из (2.5.2), если учесть, что в рассматриваемом случае имеют место (2.3.8), (2.5.5), (2.5.6) и кроме того,  $\mathbf{h} \perp S$ , т.е.  $g_{I3} = 0$ ,  $g^{I3}$ .

Теперь нетрудно найти выражения для средней и гауссовой кривизн поверхности  $S$  через основные компоненты ЕТВР. В самом деле, на основании первого соотношения (2.5.13) при  $\sim = \emptyset$  и второго соотношения (2.5.14) для средней кривизны имеем

$$2H = b_1^1 + b_2^2 = h^{-1} (g_{\overset{(-)}{I}}^I - g_{\overset{(+)}{I}}^I) = h^{-1} g_{\overset{(-)}{I}}^I (g_{\overset{(-)}{I}\overset{(-)}{I}}^{\bar{N}} - g_{\overset{(+)}{I}\overset{(+)}{I}}^{\bar{N}}),$$

а в силу второго соотношения (2.5.13) при  $\cup = \emptyset$  и второго соотношения (2.5.14) для гауссовой кривизны получаем

$$\begin{aligned} K &= h^{-2} \frac{1}{2} C^{IJ} C_{LM} (g_{\bar{I}}^L - g_{+}^L)(g_{\bar{J}}^M + g_{+}^M) = h^{-2} \det(g_{\bar{I}}^L - g_{+}^L) = h^{-2} \det[g_{\bar{N}}^L (g_{\bar{I}}^{\bar{N}} - g_{+}^{\bar{N}})] = \\ &= h^{-2} \det(g_{\bar{N}}^L) \det(g_{\bar{I}}^{\bar{M}} - g_{+}^{\bar{M}}) = \det(g_{\bar{N}}^L) [h^{-2} \det(g_{\bar{I}}^{\bar{M}} - g_{+}^{\bar{M}})]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$2H = h^{-1} (g_{\bar{I}}^I - g_{+}^I) = h^{-1} g_{\bar{N}}^I (g_{\bar{I}}^{\bar{N}} - g_{+}^{\bar{N}}), \quad K = \det(g_{\bar{N}}^L) [h^{-2} \det(g_{\bar{I}}^{\bar{M}} - g_{+}^{\bar{M}})]. \quad (2.5.15)$$

Соотношения (2.5.15) можно представить и в других формах. Нетрудно заметить, что из (2.5.15) для средней и гауссовой кривизн внутренней базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$  имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned} 2\overset{(-)}{H} &= 2H|_{x=0} = h^{-1} (g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + g_{+}^{\bar{I}}) = h^{-1} (2 - g_{+}^{\bar{I}}), \\ \overset{(-)}{K} &= K|_{x=0} = h^{-2} \det(g_{\bar{I}}^{\bar{M}} - g_{+}^{\bar{M}}) = h^{-2} \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{LM} (g_{\bar{I}}^{\bar{L}} - g_{+}^{\bar{L}})(g_{\bar{J}}^{\bar{M}} + g_{+}^{\bar{M}}) = h^{-2} (1 - g_{+}^{\bar{J}} + \overset{(\mp)}{\vartheta}). \end{aligned}$$

Итак,

$$2\overset{(-)}{H} = h^{-1} (2 - g_{+}^{\bar{I}}), \quad \overset{(-)}{K} = h^{-2} \det(g_{\bar{I}}^{\bar{M}} - g_{+}^{\bar{M}}) = h^{-2} (1 - g_{+}^{\bar{J}} + \overset{(\mp)}{\vartheta}). \quad (2.5.16)$$

Аналогично из (2.5.15) при  $x^3 = 1$  для средней и гауссовой кривизн внешней базовой поверхности  $\overset{(+)}{S}$  имеем

$$2\overset{(+)}{H} = h^{-1} (g_{\bar{I}}^{\bar{I}} - 2), \quad \overset{(+)}{K} = h^{-2} (1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \overset{(\pm)}{\vartheta}) = h^{-2} \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}})^{-1} K = \overset{(\pm)(-)}{\vartheta} K. \quad (2.5.17)$$

Заметим, что соотношения (2.5.16) и (2.5.17) можно было бы еще получить из (2.5.13) с учетом (2.5.12).

Как видно, в соотношениях (2.5.17) участвуют компоненты  $g_{\bar{I}}^{\bar{J}}$  и, так как в качестве основной базовой рассматривается внутренняя базовая поверхность  $\overset{(-)}{S}$ , то кинематические характеристики целесообразно определить с помощью основных компонент ЕТВР.

В силу первых соотношений (2.1.19) и (2.1.25) имеем соответственно

$$\overset{(\pm)}{\vartheta} = \overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1}, \quad g_{\bar{I}}^{\bar{J}} = \overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1} g_{+}^{\bar{K}}, \quad (K = 1, 2). \quad (2.5.18)$$

Учитывая (2.5.18) в (2.5.17), получим их выражения через основные компоненты ЕТВР:

$$2\overset{(+)}{H} = h^{-1} (\overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1} g_{+}^{\bar{K}} - 2) = 2 \overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1} [h^{-1} (1 - \overset{(\mp)}{\vartheta}) - \overset{(-)}{H}], \quad \overset{(+)}{K} = \overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1} \overset{(-)}{K}. \quad (2.5.19)$$

При получении последнего равенства первого соотношения (2.5.19) были использованы еще соотношения (2.5.16).

Легко усмотреть, что в силу (2.1.16) и (2.1.18) имеем

$$\vartheta^{(+)} = \sqrt{g^{(+)-1}} = \sqrt{g^{(-)-1}} \sqrt{g^{(+)-1}} = \sqrt{g^{(-)(+)-1}} \vartheta^{(-)} = \vartheta^{-1} \vartheta^{(-)}.$$

а первое соотношение (2.1.20) с учетом (2.5.16) можно также представить в виде

$$\vartheta^{(-)} = 1 - x^3(2 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}}) + (x^3)^2(1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \vartheta^{(\mp)}) = 1 - 2(hx^3)\bar{H} + (hx^3)^2\bar{K}.$$

Таким образом,

$$\vartheta^{(-)} = 1 - 2(hx^3)\bar{H} + (hx^3)^2\bar{K}, \quad \vartheta^{(+)} = \vartheta^{(\mp)-1} \vartheta^{(-)}. \quad (2.5.20)$$

Рассматривая (2.5.16) как систему и разрешая относительно  $g_{\bar{I}}^{\bar{I}}$  и  $\vartheta^{(\mp)}$ , получаем

$$g_{\bar{I}}^{\bar{I}} = 2(1 - h\bar{H}), \quad \vartheta^{(\mp)} = 1 - 2h\bar{H} + h^2\bar{K}. \quad (2.5.21)$$

Заметим, что второе соотношение (2.5.21) можно также получить из первого соотношения (2.5.20) при  $x^3 = 0$ .

Нетрудно определить и компоненты  $g_{\bar{l}}^{\bar{q}}$  с помощью компонент  $g_{\bar{m}}^{\bar{n}}$ . В самом деле, эти компоненты в силу (2.1.13) образуют взаимообратные матрицы и поэтому удовлетворяют соотношению

$$g_{\bar{n}}^{\bar{m}} g_{\bar{l}}^{\bar{n}} = g_{\bar{l}}^{\bar{m}}. \quad (2.5.22)$$

Рассматривая (2.5.22) как систему уравнений относительно неизвестных  $g_{\bar{l}}^{\bar{p}}$  и разрешая ее, приходим к соотношению

$$g_{\bar{l}}^{\bar{p}} = \frac{1}{2} [\det(g_{\bar{m}}^{\bar{n}})]^{-1} \epsilon_{lmn} \epsilon^{pqs} g_{\bar{q}}^{\bar{m}} g_{\bar{s}}^{\bar{n}} = \frac{1}{2} \vartheta^{(\mp)-1} \epsilon_{lmn} \epsilon^{pqs} g_{\bar{q}}^{\bar{m}} g_{\bar{s}}^{\bar{n}}. \quad (2.5.23)$$

Из (2.5.23) в свою очередь легко получаем

$$g_{\bar{L}}^{\bar{P}} = \vartheta^{(\mp)-1} \epsilon_{LM} \epsilon^{QS} g_{\bar{Q}}^{\bar{M}}, \quad g_{\bar{L}}^{\bar{3}} = \vartheta^{(\mp)-1} \epsilon_{LM} \epsilon^{QS} g_{\bar{Q}}^{\bar{M}} g_{\bar{S}}^{\bar{3}}, \quad g_{\bar{3}}^{\bar{P}} = g_3^p. \quad (2.5.24)$$

Следует заметить, что (2.5.24) можно было бы вывести и из соответствующих соотношений второго столбца (2.3.20) при  $x^3 = 1$ .

Теперь вернемся к соотношениям (2.5.15) и придадим им другой вид. Из первого соотношения (2.5.15) с учетом второго соотношения первой строки (2.3.20) и (2.5.16) и из второго соотношения (2.5.15) с учетом (2.1.16) и второго соотношения (2.5.16) получаем соответственно

$$\begin{aligned} 2\bar{H} &= h^{-1} \vartheta^{-1} \epsilon^{IP} \epsilon_{NL} [g_{\bar{P}}^{\bar{L}} + x^3(g_{\bar{P}}^{\bar{L}} - g_{\bar{P}}^{\bar{L}})](g_{\bar{I}}^{\bar{N}} - g_{\bar{I}}^{\bar{N}}) = \\ &= h^{-1} \vartheta^{-1} \epsilon^{IP} \epsilon_{NL} [g_{\bar{P}}^{\bar{L}} g_{\bar{I}}^{\bar{N}} - g_{\bar{P}}^{\bar{L}} g_{\bar{I}}^{\bar{N}} - x^3(g_{\bar{I}}^{\bar{N}} - g_{\bar{I}}^{\bar{N}})(g_{\bar{P}}^{\bar{L}} - g_{\bar{P}}^{\bar{L}})] = \\ &= h^{-1} \vartheta^{-1} [\epsilon^{IL} \epsilon_{IL} - \epsilon^{IL} \epsilon_{NL} g_{\bar{I}}^{\bar{N}} - x^3 \epsilon^{IP} \epsilon_{NL} (g_{\bar{I}}^{\bar{N}} - g_{\bar{I}}^{\bar{N}})(g_{\bar{P}}^{\bar{L}} - g_{\bar{P}}^{\bar{L}})] = \\ &= h^{-1} \vartheta^{-1} [2 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} - 2(x^3 h^2)] = 2 \vartheta^{(-)-1} (\bar{H} - x^3 h \bar{K}), \quad \bar{K} = \vartheta^{(-)-1} \bar{K}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$H = \vartheta^{-1}(\bar{H} - x^3 h \bar{K}), \quad K = \vartheta^{-1} \bar{K}. \quad (2.5.25)$$

Нетрудно заметить, что соотношения (2.5.17) можно также получить из (2.5.25) при  $x^3 = 1$  соответственно.

### 2.5.2.2 Представления компонент переноса и компонент ЕТВР в виде степенных рядов относительно $x^3$

Заметим, что в дальнейшем для нахождения моментов различных величин нам понадобятся представления компонент переноса  $\bar{g}_{\bar{M}}^P$ ,  $\bar{g}_{\bar{M}}^3$  и компонент  $\bar{g}^{PM}$ ,  $\bar{g}^{P3}$ ,  $\bar{g}^{33}$  ЕТВР в виде степенных рядов относительно  $x^3$ . Очевидно, эти представления можно найти различными способами. Мы остановимся на двух из них. Первым способом представим  $\bar{g}_{\bar{M}}^P$  в виде суммы простых дробей, а потом в искомом виде. Прежде всего с целью сокращения письма запишем (2.3.22) в удобной форме

$$\vartheta^{(-)} = a(x^3)^2 - 2bx^3 + 1, \quad (2.5.26)$$

где введены обозначения

$$a = (1 - g_{\bar{1}}^{\bar{1}})(1 - g_{\bar{2}}^{\bar{2}}) + g_{\bar{1}}^{\bar{2}} g_{\bar{2}}^{\bar{1}} = 1 - \text{tr}(g_{\bar{I}}^{\bar{J}}) + \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}}), \quad 2b = 2 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} = 2 - \text{tr}(g_{\bar{I}}^{\bar{J}}). \quad (2.5.27)$$

Нетрудно заметить, что с помощью  $a$  и  $b$  значения  $x^3$ , при которых квадратный трехчлен обращается в нуль (2.3.25), вычисляются по формулам

$$x_1^3 = \frac{b + \sqrt{b^2 - a}}{a}, \quad x_2^3 = \frac{b - \sqrt{b^2 - a}}{a}. \quad (2.5.28)$$

По теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 = \frac{2b}{a}, \\ x_1^3 \cdot x_2^3 = \frac{1}{a}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{x_1^3 \cdot x_2^3}, \\ b = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \right). \end{cases} \quad (2.5.29)$$

Квадратный трехчлен (2.5.26), очевидно, можно представить в виде следующего разложения

$$\vartheta^{(-)} = a(x^3 - x_1^3)(x^3 - x_2^3) = a(x_1^3 - x^3)(x_2^3 - x^3). \quad (2.5.30)$$

В силу первого соотношения (2.3.18), соответствующего соотношению (2.3.20) и (2.5.30) получаем

$$g_{\bar{M}}^P = \vartheta^{-1} A_{\bar{M}}^P = \frac{a_{\bar{M}}^P x^3 + g_{\bar{M}}^{\bar{P}}}{a(x_1^3 - x^3)(x_2^3 - x^3)} = \frac{A}{a(x_1^3 - x^3)} + \frac{B}{a(x_2^3 - x^3)} = \frac{Ax_2^3 + Bx_1^3 - (A + B)x^3}{a(x_1^3 - x^3)(x_2^3 - x^3)}.$$

Отсюда для  $A$  и  $B$  следуют выражения

$$\begin{cases} A + B = -a_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \\ Ax_2^3 + Bx_1^3 = g_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{x_2^3 - x_1^3} \left( g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x_1^3 a_{\bar{M}}^{\bar{P}} \right), \\ B = \frac{1}{x_1^3 - x_2^3} \left( g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x_2^3 a_{\bar{M}}^{\bar{P}} \right). \end{cases}$$

Подставляя выражения для  $A$  и  $B$  в предыдущее соотношение будем иметь

$$\begin{aligned} g_{\bar{M}}^P &= {}^{(-)}\vartheta^{-1} A_{\bar{M}}^P = \frac{g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x_1^3 a_{\bar{M}}^{\bar{P}}}{a(x_2^3 - x_1^3)} (x_1^3 - x^3)^{-1} - \frac{g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x_2^3 a_{\bar{M}}^{\bar{P}}}{a(x_2^3 - x_1^3)} (x_2^3 - x^3)^{-1} = \\ &= \frac{g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x_1^3 a_{\bar{M}}^{\bar{P}}}{ax_1^3(x_2^3 - x_1^3)} \left( 1 - \frac{x^3}{x_1^3} \right)^{-1} - \frac{g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x_2^3 a_{\bar{M}}^{\bar{P}}}{ax_2^3(x_2^3 - x_1^3)} \left( 1 - \frac{x^3}{x_2^3} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

т.е.

$$g_{\bar{M}}^P = {}^{(-)}\vartheta^{-1} A_{\bar{M}}^P = \frac{g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x_1^3 a_{\bar{M}}^{\bar{P}}}{ax_1^3(x_2^3 - x_1^3)} \left( 1 - \frac{x^3}{x_1^3} \right)^{-1} - \frac{g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x_2^3 a_{\bar{M}}^{\bar{P}}}{ax_2^3(x_2^3 - x_1^3)} \left( 1 - \frac{x^3}{x_2^3} \right)^{-1}, \quad (2.5.31)$$

Учитывая в (2.5.31) значение  $a$  из (2.5.29), получим

$$\begin{aligned} g_{\bar{M}}^P &= {}^{(-)}\vartheta^{-1} A_{\bar{M}}^P = \\ &= \frac{1}{x_2^3 - x_1^3} \left[ x_2^3 \left( g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x_1^3 a_{\bar{M}}^{\bar{P}} \right) \left( 1 - \frac{x^3}{x_1^3} \right)^{-1} - x_1^3 \left( g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x_2^3 a_{\bar{M}}^{\bar{P}} \right) \left( 1 - \frac{x^3}{x_2^3} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

Заметим, что по (2.5.27)  $a$  и  $b$  — инварианты, тогда в силу (2.5.28) инварианты и  $x_1^3$  и  $x_2^3$ , т.е. свойства  $x_1^3$  и  $x_2^3$  не зависят от выбора системы координат. Выбирая в качестве координатных линий на базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$  линии кривизны при  $\mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}$ , на основании первого соотношения (2.5.20) имеем

$$b = h \overset{(-)}{H} = \frac{h}{2} \left( \overset{(-)}{k}_1 + \overset{(-)}{k}_2 \right) = \frac{h}{2} \left( \overset{(-)}{R}_1^{-1} + \overset{(-)}{R}_2^{-1} \right), \quad a = h^2 \overset{(-)}{K} = h^2 \overset{(-)}{k}_1 \overset{(-)}{k}_2 = h^2 \overset{(-)}{R}_1^{-1} \overset{(-)}{R}_2^{-1}, \quad (2.5.33)$$

где  $\overset{(-)}{k}_1$  и  $\overset{(-)}{k}_2$  — главные кривизны, а  $\overset{(-)}{R}_1^{-1} = \overset{(-)}{k}_1$  и  $\overset{(-)}{R}_2^{-1} = \overset{(-)}{k}_2$  — главные радиусы кривизны базовой поверхности  $\overset{(-)}{S}$ ,  $h$  — толщина оболочки. Учитывая (2.5.33), из (2.5.28) находим

$$x_1^3 = (h \overset{(-)}{k}_1)^{-1} = \frac{\overset{(-)}{R}_1}{h}, \quad x_2^3 = (h \overset{(-)}{k}_2)^{-1} = \frac{\overset{(-)}{R}_2}{h}, \quad (2.5.34)$$

где  $h(\delta_{I1} + \delta_{I2}) < \overset{(-)}{R}_I$ . Тогда из (2.5.34) следует, что  $|x_I^3| = |\overset{(-)}{R}_I/h| > 1$ . Это условие в силу инвариантности  $x_I^3$  выполняется относительно любой системы координат. Так как  $0 \leq x^3 \leq 1$ , то

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x_I^3} \right| < 1. \quad (2.5.35)$$

В силу (2.5.35), функции

$$f_I \left( \frac{x^3}{x_I^3} \right) = \left( 1 - \frac{x^3}{x_I^3} \right)^{-1}, \quad I = 1, 2$$

являются суммами бесконечных убывающих геометрических прогрессий с знаменателями  $x^3/x_I^3$ ,  $I = 1, 2$ , т.е.

$$\left( 1 - \frac{x^3}{x_I^3} \right)^{-1} = \frac{1}{1 - x^3/x_I^3} = 1 + \frac{x^3}{x_I^3} + \left( \frac{x^3}{x_I^3} \right)^2 + \left( \frac{x^3}{x_I^3} \right)^3 + \left( \frac{x^3}{x_I^3} \right)^4 + \dots \quad (2.5.36)$$

подставляя (2.5.36) в (2.5.32), получим представление  $g_{\bar{M}}^P$  в виде степенного ряда относительно  $x^3$ . В самом деле, осуществляя простые выкладки, получаем

$$g_{\bar{M}}^P = \sum_{k=0}^{\infty} A_{(k)\bar{M}}^P (x^3)^k, \quad (2.5.37)$$

где

$$A_{(k)\bar{M}}^P = g_{\bar{M}}^P a_k + a_{(k)\bar{M}}^P a_{k-1}, \quad a_k = \frac{(x_2^3)^{k+1} - (x_1^3)^{k+1}}{(x_1^3 x_2^3)^k (x_2^3 - x_1^3)}, \quad a_{-1} = 0, \quad a_0 = 1, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.5.38)$$

Выразим несколько первых коэффициентов  $a_k$  через  $a$  и  $b$ . В силу (2.5.29) из второго соотношения (2.5.38) имеем

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= 2b, & a_2 &= 4b^2 - a, & a_3 &= 4b(2b^2 - a), \\ a_4 &= 16b^4 - 12ab^2 + a^2, & a_5 &= 2b(16b^4 - 16ab^2 + 3a^2). \end{aligned} \quad (2.5.39)$$

Учитывая малость величин  $|x^3/x_I^3|$ ,  $I = 1, 2$ , по сравнению с единицей ( $|x^3/x_I^3| < 1$ ,  $I = 1, 2$ ) и сохраняя в правой части (2.5.37), например, первые шесть членов, будем иметь следующее приближенное представление для  $g_{\bar{M}}^P$ :

$$g_{\bar{M}}^P \approx \sum_{k=0}^5 A_{(k)\bar{M}}^P (x^3)^k, \quad (2.5.40)$$

где в силу (2.5.39)

$$\begin{aligned} A_{(0)\bar{M}}^P &= g_{\bar{M}}^P, & A_{(1)\bar{M}}^P &= 2bg_{\bar{M}}^P + a_{\bar{M}}^P, & A_{(2)\bar{M}}^P &= (4b^2 - a)g_{\bar{M}}^P + 2ba_{\bar{M}}^P, \\ A_{(3)\bar{M}}^P &= 4b(2b^2 - a)g_{\bar{M}}^P + (4b^2 - a)a_{\bar{M}}^P, \\ A_{(4)\bar{M}}^P &= (16b^4 - 12ab^2 + a^2)g_{\bar{M}}^P + 4b(2b^2 - a)a_{\bar{M}}^P, \\ A_{(5)\bar{M}}^P &= 2b(16b^4 - 16ab^2 + 3a^2)g_{\bar{M}}^P + (16b^4 - 12ab^2 + a^2)a_{\bar{M}}^P. \end{aligned} \quad (2.5.41)$$

На основании второго соотношения (2.5.27) второе соотношение (2.3.18) представится в виде

$$a_{\bar{M}}^P = (1 - 2b)g_{\bar{M}}^P - g_{\bar{M}}^P,$$

с учетом которого для коэффициентов (2.5.41) будем иметь представления

$$\begin{aligned} {}_{(0)}^{\bar{P}} A_{+}^{\bar{P}} &= g_{\bar{M}}^{\bar{P}}, \quad {}_{(1)}^{\bar{P}} A_{+}^{\bar{P}} = g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{+}^{\bar{P}}, \quad {}_{(2)}^{\bar{P}} A_{+}^{\bar{P}} = (2b-a)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - 2bg_{+}^{\bar{P}}, \\ {}_{(3)}^{\bar{P}} A_{+}^{\bar{P}} &= (4b^2 - 2ab - a)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - (4b^2 - a)g_{+}^{\bar{P}}, \\ {}_{(4)}^{\bar{P}} A_{+}^{\bar{P}} &= (8b^3 - 4ab^2 - 4ab + a^2)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - 4b(2b^2 - a)g_{+}^{\bar{P}}, \\ {}_{(5)}^{\bar{P}} A_{+}^{\bar{P}} &= (16b^4 - 8ab^3 - 12ab^2 + 4a^2b + a^2)g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - (16b^4 - 12ab^2 + a^2)g_{+}^{\bar{P}}. \end{aligned} \quad (2.5.42)$$

Теперь рассмотрим второй, более удобный, способ представления  $g_{\bar{M}}^{\bar{P}}$  в виде степенного ряда относительно  $x^3$ . Для этого с помощью соотношения (2.1.11) и (2.1.12) представим  $\mathbf{r}_p$  в форме

$$\mathbf{r}_p = g_p^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}} = [(1 - x^3)g_{\bar{p}}^{\bar{q}} + x^3 g_{+}^{\bar{q}}] \mathbf{r}_{\bar{q}} = \mathbf{r}_{\bar{p}} \cdot {}^{(-)} \mathbf{A} = \mathbf{r}_{\bar{p}} \cdot (\mathbf{E} - x^3 {}^{(-)} \mathbf{B}), \quad (2.5.43)$$

где  $\mathbf{E}$  — единичный тензор второго ранга и введены обозначения

$${}^{(-)} \mathbf{A} = \mathbf{r}_{\bar{p}}^{\bar{p}} \mathbf{r}_p = \mathbf{E} - x^3 {}^{(-)} \mathbf{B} = [g_{\bar{p}}^{\bar{q}} - x^3(g_{\bar{p}}^{\bar{q}} - g_{+}^{\bar{q}})] \mathbf{r}_{\bar{q}} = (g_{\bar{p}}^{\bar{q}} - g_{+}^{\bar{q}}) \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad {}^{(-)} \mathbf{B} = (g_{\bar{p}}^{\bar{q}} - g_{+}^{\bar{q}}) \mathbf{r}_{\bar{q}}. \quad (2.5.44)$$

Очевидно,  ${}^{(-)} \mathbf{B}^T = {}^{(-)} \mathbf{B}$  а отсюда следует, что и  ${}^{(-)} \mathbf{A}^T = {}^{(-)} \mathbf{A}$ . Заметим, что в силу первого соотношения (2.5.44) для матрицы тензора  $\mathbf{A}$  будем иметь выражения

$$\text{matr} {}^{(-)} \mathbf{A} = \text{matr} (\mathbf{E} - x^3 {}^{(-)} \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 - x^3(1 - g_{+}^{\bar{1}}) & x^3 g_{+}^{\bar{2}} & x^3 g_{+}^{\bar{3}} \\ x^3 g_{+}^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_{+}^{\bar{2}}) & x^3 g_{+}^{\bar{3}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5.45)$$

Учитывая (2.3.22) и (2.5.45), имеем

$$\det {}^{(-)} \mathbf{A} = \det (\mathbf{E} - x^3 {}^{(-)} \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 - x^3(1 - g_{+}^{\bar{1}}) & x^3 g_{+}^{\bar{2}} \\ x^3 g_{+}^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_{+}^{\bar{2}}) \end{vmatrix} = {}^{(-)} \vartheta \neq 0. \quad (2.5.46)$$

На основании (2.5.46) можно утверждать, что существует единственный обратный тензор  ${}^{(-)} \mathbf{A}^{-1}$  и соответственно единственная обратная матрица  $\text{matr} {}^{(-)} \mathbf{A}^{-1}$ . Поэтому (2.5.43) можно разрешить относительно  $\mathbf{r}_{\bar{p}}$ . Получим

$$\mathbf{r}_{\bar{p}} = \mathbf{r}_p \cdot {}^{(-)} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{r}_p \cdot (\mathbf{E} - x^3 {}^{(-)} \mathbf{B})^{-1}. \quad (2.5.47)$$

Аналогично (2.5.43) для  $\mathbf{r}^p$  имеем

$$\mathbf{r}^p = g_{\bar{q}}^p \mathbf{r}_{\bar{q}} = {}^{(-)} \mathbf{D} \cdot \mathbf{r}_{\bar{p}}, \quad {}^{(-)} \mathbf{D} = \mathbf{r}^p \mathbf{r}_{\bar{p}} = g_{\bar{q}}^p \mathbf{r}_{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{p}}. \quad (2.5.48)$$

Нетрудно усмотреть, что

$$\overset{(-)}{\mathbf{D}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{A}} = \overset{(-)}{\mathbf{A}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{D}} = \overset{(-)}{\mathbf{E}}, \quad \overset{(-)}{\mathbf{D}} = \overset{(-)}{\mathbf{A}}^{-1}. \quad (2.5.49)$$

В самом деле, в силу первого соотношения (2.5.44) и второго соотношения (2.5.48) находим

$$\overset{(-)}{\mathbf{D}} \cdot \overset{(-)}{\mathbf{A}} = \mathbf{r}^p \mathbf{r}_{\bar{p}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{m}} \mathbf{r}_m = \mathbf{r}^p g_{\bar{p}}^{\bar{m}} \mathbf{r}_m = \mathbf{r}^m \mathbf{r}_m,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, учитывая второе соотношение (2.5.49), первое соотношение (2.5.48) можно представить в виде

$$\mathbf{r}^p = g_{\bar{q}}^p \mathbf{r}^{\bar{q}} = \overset{(-)}{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{r}^{\bar{p}}, \quad \overset{(-)}{\mathbf{A}}^{-1} = (\overset{(-)}{\mathbf{E}} - x^3 \overset{(-)}{\mathbf{B}})^{-1} = \mathbf{r}^p \mathbf{r}_{\bar{p}} = g_{\bar{q}}^p \mathbf{r}^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{p}}. \quad (2.5.50)$$

Не представляет большого труда найти выражения для  $\overset{(-)}{\mathbf{A}}^{-1}$  или для  $\text{matr} \overset{(-)}{\mathbf{A}}^{-1}$  через основные компоненты переноса ЕТВР. На основании второго соотношения (2.5.50) приходим к выражению

$$\text{matr} \overset{(-)}{\mathbf{A}}^{-1} = \vartheta^{-1} \begin{pmatrix} 1 - x^3(1 - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}) & -x^3 g_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{2}} & (x^3)^2 g_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{2}} g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} - x^3 g_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{3}} [1 - x^3(1 - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}})] \\ x^3 g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{1}} & 1 - x^3(1 - g_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{1}}) & (x^3)^2 g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{1}} g_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{3}} - x^3 g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} [1 - x^3(1 - g_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{1}})] \\ 0 & 0 & \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.5.51)$$

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{r}^P = g_{\bar{M}}^P \mathbf{r}^{\bar{M}} = \vartheta^{-1} A_{\bar{M}}^P \mathbf{r}^{\bar{M}} = \overset{(-)}{\mathbf{a}}^{-1} \cdot \mathbf{r}^{\bar{P}}, \quad (2.5.52)$$

где, очевидно,

$$\overset{(-)}{\mathbf{a}}^{-1} = \mathbf{r}^P \mathbf{r}_{\bar{P}} = g_{\bar{M}}^P \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}_{\bar{P}} = \vartheta^{-1} A_{\bar{M}}^P \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}_{\bar{P}}. \quad (2.5.53)$$

С помощью (2.3.18) нетрудно проверить, что матрицей тензору  $\overset{(-)}{\mathbf{a}}^{-1}$  служит матрица, получающаяся при пересечении первых двух строк и двух столбцов в (2.5.51), т.е.

$$\text{matr} \overset{(-)}{\mathbf{a}}^{-1} = \text{matr} \left( \vartheta^{-1} A_{\bar{M}}^P \right) = \vartheta^{-1} \text{matr} \left( A_{\bar{M}}^P \right) = \vartheta^{-1} \begin{pmatrix} 1 - x^3(1 - g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}) & -x^3 g_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{2}} \\ x^3 g_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{1}} & 1 - x^3(1 - g_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{1}}) \end{pmatrix}. \quad (2.5.54)$$

Следовательно,

$$\det \left( A_{\bar{M}}^P \right) = \vartheta, \quad \det \overset{(-)}{\mathbf{a}}^{-1} = \det \left( \vartheta^{-1} A_{\bar{M}}^P \right) = \vartheta^{-1}.$$

Теперь рассмотрим тензор

$$\overset{(-)}{\mathbf{a}} = \overset{(-)}{\mathbf{E}} - x^3 \overset{(-)}{\mathbf{B}}, \quad \overset{(-)}{\mathbf{B}} = \left( g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}} \right) \mathbf{r}_{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} = \left( g_{\bar{P}\bar{M}} - g_{\bar{P}\bar{M}} \right) \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}}. \quad (2.5.55)$$

В первую очередь заметим, что  $\underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)T} = \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)}$  при  $\mathbf{h} \perp \underline{\underline{S}}^{(-)}$ , так как в этом случае (2.3.11)  $g_{IJ}^{(+)} = g_{JI}^{(+)}$  и, следовательно,  $\underline{\underline{\mathbf{a}}}^{(-)T} = \underline{\underline{\mathbf{a}}}^{(-)}$ .  
Далее, очевидно, что

$$\text{matr} \underline{\underline{\mathbf{a}}}^{(-)} = \text{matr} (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - x^3 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)}) = \begin{pmatrix} 1 - x^3(1 - g_+^{\bar{1}}) & x^3 g_+^{\bar{2}} \\ x^3 g_+^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_+^{\bar{2}}) \end{pmatrix}. \quad (2.5.56)$$

Сравнивая (2.5.56) с (2.5.45), заключаем, что (2.5.56) получается из (2.5.45) вычеркиванием последней строки и последнего столбца. В силу (2.5.46) нетрудно усмотреть, что

$$\det \underline{\underline{\mathbf{a}}}^{(-)} = \det (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - x^3 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)}) = \det \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(-)} = \vartheta^{(-)} \neq 0.$$

Поэтому на основании последнего соотношения утверждаем, что существует единственный обратный к  $\underline{\underline{\mathbf{a}}}^{(-)}$  тензор, который, как нетрудно доказать, совпадает с тензором (2.5.53), а его матрица — с матрицей (2.5.54).

Таким образом, для  $\underline{\underline{\mathbf{a}}}^{-1}$  имеем представления

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}}^{-1} = (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - x^3 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)})^{-1} = \mathbf{r}_P^P \mathbf{r}_{\bar{P}}^{\bar{M}} = g_{\bar{M}}^P \mathbf{r}_{\bar{P}}^{\bar{M}} = \vartheta^{-1} A_{\bar{M}}^P \mathbf{r}_{\bar{P}}^{\bar{M}} \mathbf{r}_P^P. \quad (2.5.57)$$

Теперь, учитывая первое равенство (2.5.57), соотношение (2.5.52) можно представить в удобном для дальнейшего пользования виде

$$\mathbf{r}^P = g_{\bar{M}}^P \mathbf{r}_{\bar{P}}^{\bar{M}} = \mathbf{r}_{\bar{P}}^{\bar{P}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - x^3 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)})^{-1} = (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - x^3 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)})^{-1} \cdot \mathbf{r}_{\bar{P}}^{\bar{P}}. \quad (2.5.58)$$

Следует заметить, что в случае тонких тел  $|x^3 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)}| < 1$  ( $|x^3 b_{\bar{P}}^{\bar{Q}}| < 1$ ). Поэтому имеем соотношения

$$(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - x^3 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)})^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (x^3)^s \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)s} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} + x^3 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)} + (x^3)^2 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)2} + (x^3)^3 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)3} + \dots, \quad (2.5.59)$$

$$(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - x^3 \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)})^{-2} = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)s} (x^3)^s, \quad (2.5.60)$$

где, очевидно,

$$\underline{\underline{\mathbf{b}}}^{(-)n} = (g_{\bar{K}_1}^{\bar{P}} - g_{\bar{K}_1}^{\bar{P}})(g_{\bar{K}_2}^{\bar{K}_1} - g_{\bar{K}_2}^{\bar{K}_1}) \cdot \dots \cdot (g_{\bar{K}_{n-1}}^{\bar{K}_{n-2}} - g_{\bar{K}_{n-1}}^{\bar{K}_{n-2}})(g_{\bar{M}}^{\bar{K}_{n-1}} - g_{\bar{M}}^{\bar{K}_{n-1}}) \mathbf{r}_{\bar{P}}^{\bar{M}} \mathbf{r}_{\bar{P}}^{\bar{M}}. \quad (2.5.61)$$

С помощью (2.5.59) и (2.5.61) соотношение (2.5.58) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^P = g_{\bar{M}}^P \mathbf{r}_{\bar{P}}^{\bar{M}} &= [g_{\bar{M}}^{\bar{P}} + x^3(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}}) + (x^3)^2(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}})(g_{\bar{M}}^{\bar{K}} - g_{\bar{M}}^{\bar{K}}) + \\ &+ (x^3)^3(g_{\bar{M}}^{\bar{P}} - g_{\bar{M}}^{\bar{P}})(g_{\bar{M}}^{\bar{K}_1} - g_{\bar{M}}^{\bar{K}_1})(g_{\bar{M}}^{\bar{K}_2} - g_{\bar{M}}^{\bar{K}_2}) + \dots] \mathbf{r}_{\bar{P}}^{\bar{M}}. \end{aligned} \quad (2.5.62)$$

Отсюда в свою очередь получаем второе (после (2.5.37)) искомое выражение для  $g_{\underline{M}}^P$ . А именно,

$$\begin{aligned} g_{\underline{M}}^P = & \mathbf{r}^P \cdot \mathbf{r}_{\underline{M}} = \bar{\mathbf{r}}^P \cdot (\mathbf{\tilde{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-1} \cdot \mathbf{r}_{\underline{M}} = \sum_{s=0}^{\infty} \bar{\mathbf{r}}^P \cdot \underline{\mathbf{b}}^{(s)} \cdot \mathbf{r}_{\underline{M}} (x^3)^s = g_{\underline{M}}^{\bar{P}} + x^3 (g_{\underline{M}}^{\bar{P}} - g_{\underline{M}}^{\bar{P}}) + \\ & + (x^3)^2 (g_{\underline{K}}^{\bar{P}} - g_{\underline{M}}^{\bar{P}}) (g_{\underline{M}}^{\bar{K}} - g_{\underline{M}}^{\bar{K}}) + (x^3)^3 (g_{\underline{K}_1}^{\bar{P}} - g_{\underline{K}_1}^{\bar{P}}) (g_{\underline{K}_2}^{\bar{K}_1} - g_{\underline{K}_2}^{\bar{K}_1}) (g_{\underline{M}}^{\bar{K}_2} - g_{\underline{M}}^{\bar{K}_2}) + \dots \end{aligned} \quad (2.5.63)$$

Сравнивая (2.5.63) с (2.5.37), можно утверждать, что

$$\begin{aligned} A_{(0)\underline{M}}^{\bar{P}} &= \bar{\mathbf{r}}^P \cdot \underline{\mathbf{b}}^{(0)} \cdot \mathbf{r}_{\underline{M}} = g_{\underline{M}}^{\bar{P}}, \quad A_{(1)\underline{M}}^{\bar{P}} = \bar{\mathbf{r}}^P \cdot \underline{\mathbf{b}}^{(1)} \cdot \mathbf{r}_{\underline{M}} = g_{\underline{M}}^{\bar{P}} - g_{\underline{M}}^{\bar{P}}, \\ A_{(2)\underline{M}}^{\bar{P}} &= \bar{\mathbf{r}}^P \cdot \underline{\mathbf{b}}^{(2)} \cdot \mathbf{r}_{\underline{M}} = (g_{\underline{N}}^{\bar{P}} - g_{\underline{N}}^{\bar{P}}) (g_{\underline{M}}^{\bar{N}} - g_{\underline{M}}^{\bar{N}}), \dots, \\ A_{(n)\underline{M}}^{\bar{P}} &= \bar{\mathbf{r}}^P \cdot \underline{\mathbf{b}}^{(n)} \cdot \mathbf{r}_{\underline{M}} = (g_{\underline{N}_1}^{\bar{P}} - g_{\underline{N}_1}^{\bar{P}}) (g_{\underline{N}_2}^{\bar{N}_1} - g_{\underline{N}_2}^{\bar{N}_1}) \dots (g_{\underline{N}_{n-1}}^{\bar{N}_{n-2}} - g_{\underline{N}_{n-1}}^{\bar{N}_{n-2}}) (g_{\underline{M}}^{\bar{N}_{n-1}} - g_{\underline{M}}^{\bar{N}_{n-1}}). \end{aligned} \quad (2.5.64)$$

Следует заметить, что идентичность представлений (2.5.38) и (2.5.64) можно доказать и непосредственной проверкой. Так как остальные рассматриваемые компоненты ЕТВР выражаются через  $g_{\underline{M}}^P$ , то представление (2.5.37) или, что то же самое (2.5.62), имеет важное значение. Кроме того, в зависимости от рассматриваемой конкретной задачи и требуемой точности приближения в правой части (2.5.40) следует менять (уменьшать или увеличивать) число слагаемых.

Не представляет труда найти искомое представление для  $g_{\underline{M}}^3$ . В самом деле, из второго соотношения третьей строки (2.3.20) с учетом (2.5.37) получаем

$$g_{\underline{M}}^3 = -g_{\underline{P}}^{\bar{3}} g_{\underline{M}}^P = -g_{\underline{P}}^{\bar{3}} x^3 g_{\underline{M}}^P = -g_{\underline{P}}^{\bar{3}} \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)\underline{M}}^{\bar{P}} (x^3)^{s+1} \quad (2.5.65)$$

и аналогично (2.5.40) можно рассматривать приближенное представление

$$g_{\underline{M}}^3 \approx -g_{\underline{P}}^{\bar{3}} \sum_{s=1}^5 A_{(s)\underline{M}}^{\bar{P}} (x^3)^{s+1}.$$

Теперь найдем представление для  $g^{PQ}$ . В силу (2.5.58) с учетом (2.5.60) и (2.5.64) получаем

$$\begin{aligned} g^{PQ} &= \mathbf{r}^P \cdot \mathbf{r}^Q = g_{\underline{M}}^P g_{\underline{N}}^Q g_{\underline{M}\underline{N}} = \bar{\mathbf{r}}^P \cdot (\mathbf{\tilde{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-2} \cdot \mathbf{r}_{\underline{Q}} \stackrel{(2.5.60)}{=} \\ &\stackrel{(2.5.60)}{=} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \bar{\mathbf{r}}^P \cdot \underline{\mathbf{b}}^{(s)} \cdot \mathbf{r}_{\underline{Q}} (x^3)^s = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \bar{\mathbf{r}}^P \cdot \underline{\mathbf{b}}^{(s)} \cdot \mathbf{r}_{\underline{M}} g_{\underline{M}}^{\bar{Q}\bar{Q}} (x^3)^s \stackrel{(2.5.64)}{=} \\ &\stackrel{(2.5.64)}{=} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) g_{\underline{M}}^{\bar{Q}\bar{M}} A_{(s)\underline{M}}^{\bar{P}} (x^3)^s. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое представление для  $g^{PQ}$  имеет вид

$$g^{PQ} = g_{\underline{M}}^P g_{\underline{N}}^Q g_{\underline{M}\underline{N}} = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) g_{\underline{M}}^{\bar{Q}\bar{M}} A_{(s)\underline{M}}^{\bar{P}} (x^3)^s. \quad (2.5.66)$$

Нетрудно найти представление и для  $g^{P3}$ . В самом деле, из второго соотношения (2.3.37) с учетом (2.5.65) и (2.5.66) получаем

$$g^{P3} = g_{\bar{M}\bar{N}}^P g_{\bar{M}\bar{N}}^3 g^{\bar{M}\bar{N}} = -g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} x^3 g_{\bar{M}\bar{N}}^P g_{\bar{M}\bar{N}}^Q g^{\bar{M}\bar{N}} = -g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} (x^3) g^{PQ} = -g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \sum_{Qs=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} (x^3)^{s+1}.$$

Итак, искомое соотношение представляется в форме

$$g^{P3} = g_{\bar{M}\bar{N}}^P g_{\bar{M}\bar{N}}^3 g^{\bar{M}\bar{N}} = -g_{\bar{Q}}^{\bar{3}} \sum_{Qs=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} (x^3)^{s+1}. \quad (2.5.67)$$

Наконец, найдем искомое выражение для  $g^{33}$ . Из второго соотношения (2.3.37) в силу (2.5.65) и (2.5.66) находим

$$\begin{aligned} g^{33} &= g_{\bar{m}\bar{n}}^3 g_{\bar{m}\bar{n}}^3 g^{\bar{m}\bar{n}} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{M}\bar{N}}^3 g_{\bar{M}\bar{N}}^3 g^{\bar{M}\bar{N}} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} (x^3)^2 g_{\bar{M}\bar{N}}^P g_{\bar{M}\bar{N}}^Q g^{\bar{M}\bar{N}} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} (x^3)^2 g^{PQ} = \\ &= g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} \sum_{Qs=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} (x^3)^{s+2}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к представлению

$$g^{33} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} (x^3)^2 g^{PQ} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} g_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} \sum_{Qs=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)\bar{M}}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} (x^3)^{s+2}. \quad (2.5.68)$$

Найдем еще выражение в виде ряда относительно  $x^3$  произведения  $g_{\bar{M}\bar{N}}^P g_{\bar{M}\bar{N}}^Q$ . С этой целью воспользуемся представлением (2.5.37) и правилом умножения рядов в форме Коши. В результате получим

$$g_{\bar{M}\bar{N}}^P g_{\bar{M}\bar{N}}^Q = \sum_{s=0}^{\infty} \left( \sum_{r=0}^s A_{(s-r)\bar{M}}^{\bar{P}} A_{(r)\bar{N}}^{\bar{Q}} \right) (x^3)^s = \sum_{s=0}^{\infty} B_{(s)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} (x^3)^s, \quad B_{(s)\bar{M}\bar{N}}^{\bar{P}\bar{Q}} = \sum_{r=0}^s A_{(s-r)\bar{M}}^{\bar{P}} A_{(r)\bar{N}}^{\bar{Q}}. \quad (2.5.69)$$

Следует заметить, что число слагаемых в правых частях (2.5.66)–(2.5.69) аналогично (2.5.37) и (2.5.65) определяется характером рассматриваемой задачи и точностью приближения. Нетрудно найти представления компонент ETBP в частных случаях рассматриваемой параметризации области тонкого тела. Кроме того, соотношения (2.5.37), (2.5.65) и (2.5.66)–(2.5.68) играют важную роль при построении различных вариантов общих теорий высшего порядка для тонких тел с применением разложения по ортогональным полиномам.

### 2.5.2.3 О представлении расширенного второго тензора поверхности

Обозначим через  $\overset{(\sim)}{\mathbf{b}}$  второй тензор поверхности  $\overset{(\sim)}{S}$ ,  $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ . Тогда, очевидно, в силу (2.1.12) и (2.1.13) для вторых тензоров поверхностей будем иметь следующие представления:

$$\begin{aligned} \overset{(-)}{\mathbf{b}} &= \overset{(-)}{b}_{\bar{P}\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{Q}} = \overset{(-)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_{\bar{Q}}^+ = \overset{(-)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_Q = \overset{(-)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}^{\hat{P}} \mathbf{r}_{\check{Q}}, \\ \mathbf{b} &= b_{PQ} \mathbf{r}^P \mathbf{r}^Q = b_{\bar{P}}^Q \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}_Q = b_{\bar{P}}^Q \mathbf{r}_{\bar{P}}^+ \mathbf{r}_Q = b_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}^{\hat{P}} \mathbf{r}_{\check{Q}}, \\ \overset{(+)}{\mathbf{b}} &= \overset{(+)}{b}_{\bar{P}\bar{Q}} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{Q}} = \overset{(+)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}_{\bar{P}}^+ \mathbf{r}_{\bar{Q}}^- = \overset{(+)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}_{\bar{P}}^+ \mathbf{r}_Q = \overset{(+)}{b}_{\bar{P}}^{\bar{Q}} \mathbf{r}^{\hat{P}} \mathbf{r}_{\check{Q}}, \quad \wedge, \sim \in \{-, \emptyset, +\} \end{aligned} \quad (2.5.70)$$

где

$$\overset{(\sim)}{b}_{\hat{P}}^{\check{Q}} = g_{\hat{P}}^{\tilde{M}} g_{N}^{\tilde{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\tilde{M}}^{N}, \quad \sim, \vee, \wedge, \sim, * \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Всевозможные представления тензоров (2.5.70), конечно, получаются жонглированием индексами. Каждый из этих тензоров в силу (2.5.10) в качестве своих компонент имеет компоненты вторых тензоров поверхностей  $\overset{(-)}{S}$ ,  $S$ ,  $\overset{(+)}{S}$ , а также отличные от этих компонент компоненты. В этом смысле они называются расширенными вторыми тензорами.

Можно было вводить в рассмотрение расширенные до трехмерного пространства тензоры. В самом деле, определяя компоненты этих тензоров следующим образом

$$\overset{(\sim)}{b}_{\hat{P}}^{\check{q}} = g_{\hat{P}}^{\tilde{M}} g_{\check{N}}^{\check{q}} \overset{(\sim)}{b}_{\tilde{M}}^{\check{N}}, \quad \sim, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.5.71)$$

их можно представить в виде

$$\underline{b} = \overset{(\sim)}{b}_{\hat{P}}^{\check{q}} \mathbf{r}^{\hat{P}} \mathbf{r}_{\check{q}}, \quad \sim, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (2.5.72)$$

Из (2.5.71) следует, что компоненты тензоров (2.5.72) равны нулю, если хотя бы один индекс равен трем. Очевидно, тензоры (2.5.72) содержат (2.5.70).

### 2.5.3 О тензорах Римана-Кристоффеля в $\mathbb{R}^3$

К определению тензора Римана-Кристоффеля можно прийти различными путями, среди которых чаще всего рассматриваются условия перестановочности (коммутативности) повторного ковариантного дифференцирования компонент тензора, ранг которого не меньше 1, а компоненты принадлежат классу  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , [2, 8, 16, 22, 28, 29], евклидовости пространства [27, 28], совместности деформаций [7, 29] и др.

Следует заметить, что тензор Римана-Кристоффеля, к определению которого можно еще прийти, рассматривая условия перестановочности повторного обычного дифференцирования тензора, принадлежащего классу  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , ранг которого не меньше 1, играет существенную роль в дифференциальной геометрии, динамике твердого и деформируемого твердого тела, электродинамике и теории относительности. Заметим также, что принадлежность компонент тензора классу  $C^2$  является достаточным условием для равенства смешанных частных производных от них. Этим обстоятельством мы часто будем пользоваться.

Ниже определим тензор Римана-Кристоффеля путем, указанным во втором абзаце данного подраздела, приведем его представления при новой параметризации области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$ , исходя из тензора Римана-Кристоффеля трехмерного евклидова пространства, определим аналогичные им тензоры для двумерных поверхностей, а также дадим представления последних и найдем связь между ними. Кроме того, введем в рассмотрение расширенные тензоры Римана-Кристоффеля для двумерных пространств при рассматриваемой параметризации области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$ .

**Определение 2.5.1.** Будем говорить, что произвольный локальный базис принадлежит классу  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , если каждый базисный вектор этого базиса принадлежит тому же классу.

**Определение 2.5.2.** Будем говорить, что произвольный вектор  $\mathbf{a} \in C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , если его компоненты и базис, в котором он представлен, принадлежат тому же классу.

Пусть  $\mathbf{a}$  — произвольный вектор, принадлежащий классу  $C^k$ ,  $k \geq 2$ . Тогда в некотором локальном базисе, очевидно, его можно представить в виде

$$\mathbf{a} = a^m \mathbf{r}_m = a_m \mathbf{r}^m. \quad (2.5.73)$$

Заметим, что  $\mathbf{r}_m$  и  $\mathbf{r}^m$  в (2.5.73) — ковариантные и контравариантные базисные вектора при любой параметризации некоторой области  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . За криволинейные координаты примем  $x^1, x^2, x^3$ .

Дифференцируя, например, первое равенство (2.5.73) по  $x^p$ , а полученное соотношение по  $x^q$ , получим

$$\begin{aligned} \partial_q \partial_p \mathbf{a} &= \partial_q \partial_p (a^m \mathbf{r}_m) = (\partial_q \nabla_p a^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m) \mathbf{r}_m = [\partial_q (\partial_p a^m + a^n \Gamma_{np}^m) + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m] \mathbf{r}_m = \\ &= (\partial_q \partial_p a^m + \partial_q a^n \Gamma_{np}^m + a^n \partial_q \Gamma_{np}^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m) \mathbf{r}_m = \\ &= [\partial_q \partial_p a^m + \nabla_q a^n \Gamma_{np}^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m + (\partial_q \Gamma_{lp}^m - \Gamma_{lq}^n \Gamma_{np}^m) a^l] \mathbf{r}_m, \end{aligned}$$

т.е.

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} = [\partial_q \partial_p a^m + \nabla_q a^n \Gamma_{np}^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m + (\partial_q \Gamma_{lp}^m - \Gamma_{lq}^n \Gamma_{np}^m) a^l] \mathbf{r}_m. \quad (2.5.74)$$

После перестановки местами индексов  $q$  и  $p$  в (2.5.74), будем иметь

$$\partial_p \partial_q \mathbf{a} = [\partial_p \partial_q a^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m + \nabla_q a^n \Gamma_{np}^m + (\partial_p \Gamma_{lp}^m - \Gamma_{lp}^n \Gamma_{nq}^m) a^l] \mathbf{r}_m. \quad (2.5.75)$$

Теперь вычитая из (2.5.74) почленно (2.5.75), в силу определения 1.5.2 получаем

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = (\partial_q \Gamma_{lp}^m - \partial_p \Gamma_{lq}^m + \Gamma_{lp}^n \Gamma_{nq}^m - \Gamma_{lq}^n \Gamma_{np}^m) a^l \mathbf{r}_m. \quad (2.5.76)$$

Вводя обозначение

$$\mathbb{R}_{pq}^{...m} = \partial_q \Gamma_{lp}^m - \partial_p \Gamma_{lq}^m + \Gamma_{lp}^n \Gamma_{nq}^m - \Gamma_{lq}^n \Gamma_{np}^m, \quad (2.5.77)$$

соотношение (2.5.76) можно представить в виде

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = \mathbb{R}_{pq}^{...m} a^l \mathbf{r}_m. \quad (2.5.78)$$

Нетрудно установить закон преобразования левой части (2.5.78) при переходе одной системы координат к другой. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  закон перехода от одной системы координат  $x^1, x^2, x^3$  к другой  $x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$  в виде

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3) \quad (2.5.79)$$

и обратно

$$x^i = x^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}). \quad (2.5.80)$$

Следовательно, определители якобиевых матриц

$$D_i^{i'} \equiv \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad D_{i'}^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \quad (2.5.81)$$

отличны от нуля и связаны между собой соотношениями

$$D_j^{i'} D_{j'}^j = \delta_{j'}^{i'}, \quad D_{j'}^i D_j^{j'} = \delta_j^i. \quad (2.5.82)$$

Заметим, что выполнение условий (2.5.82) влечет за собой неравенство нулю определителей якобиевых матриц (2.5.81). Кроме того, при выполнении (2.5.80) и (2.5.82) преобразование координат (2.5.79) называется общим [22]. Итак, наша задача заключается в установлении поведения левой части (2.5.78) относительно общей группы преобразования (2.5.79) в  $\mathbb{R}^3$ . В этой связи найдем  $\partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a}$ . В силу (2.5.79) и (2.5.81) имеем

$$\partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a} = \partial_{q'} \left( \partial_p \mathbf{a} \frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}} \right) = \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{p'} \partial x^{q'}} \partial_p \mathbf{a} + D_{p'}^p D_{q'}^q \partial_q \partial_p \mathbf{a},$$

т.е.

$$\begin{aligned} \partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a} &= \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{p'} \partial x^{q'}} \partial_k \mathbf{a} + D_{q'}^q D_{p'}^p \partial_q \partial_p \mathbf{a}, \\ \partial_{p'} \partial_{q'} \mathbf{a} &= \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{q'} \partial x^{p'}} \partial_k \mathbf{a} + D_{p'}^p D_{q'}^q \partial_p \partial_q \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (2.5.83)$$

где второе соотношение (2.5.83) получено из первого при замене местами индексы  $q'$  и  $p'$ .

Теперь вычитая из первого соотношения (2.5.83) почленно второе и учитывая, что  $\mathbf{a} \in C^k$ ,  $k \geq 2$ , будем иметь

$$\partial_{q'} \partial_p \mathbf{a} - \partial_{p'} \partial_q \mathbf{a} = D_{q'}^q D_{p'}^p (\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a}). \quad (2.5.84)$$

Очевидно, в силу (2.5.82) обратное к (2.5.84) соотношение представится в виде

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = D_q^{q'} D_p^{p'} (\partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a} - \partial_{p'} \partial_{q'} \mathbf{a}). \quad (2.5.85)$$

На основании (2.5.84) и (2.5.85) заключаем, что левая часть (2.5.78) преобразуется как ковариантные компоненты тензора второго ранга, т.е. по ковариантному закону. В силу того, что  $a^l$  как контравариантные компоненты вектора  $\mathbf{a}$  преобразуются по контравариантному закону, а  $\mathbf{r}_m$  – по ковариантному, по обратному тензорному признаку  $\mathbb{R}^{pqlm}$  являются компонентами тензора четвертого ранга, который называется тензором Римана-Кристоффеля или тензором кривизны. Ковариантные компоненты тензора Римана-Кристоффеля получим, если опустим индекс  $m$ . Очевидно, имеем

$$\mathbb{R}_{pqlm}^{\dots\dots} = g_{mn} \mathbb{R}_{pql}^{\dots\dots n}. \quad (2.5.86)$$

Нетрудно получить выражение для ковариантных компонент тензора кривизны посредством символов Кристоффеля. В самом деле, учитывая (2.5.77) в (2.5.86) и осуществляя простые выкладки, получим

$$\mathbb{R}_{pqlm}^{\dots\dots} = \partial_q \Gamma_{lp,m} - \partial_p \Gamma_{lq,m} + \Gamma_{lq}^n \Gamma_{mp,n} - \Gamma_{lp}^n \Gamma_{mq,n}. \quad (2.5.87)$$

Следует заметить, что смешанные производные  $\partial_q \partial_p \mathbf{a}$  можно представить и в другом виде. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_q \partial_p \mathbf{a} &= \partial_q \partial_p (a^m \mathbf{r}_m) = \partial_q (\nabla_p a^m \mathbf{r}_m) = (\partial_q \nabla_p a^m) \mathbf{r}_m + \nabla_p a^n \partial_q \mathbf{r}_n = (\partial_q \nabla_p a^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m) \mathbf{r}_m = \\ &= (\partial_q \nabla_p a^m - \nabla_p a^m \Gamma_{pq}^n + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m + \nabla_n a^m \Gamma_{pq}^n) \mathbf{r}_m = (\nabla_q \nabla_p a^m + \nabla_n a^m \Gamma_{pq}^n) \mathbf{r}_m, \end{aligned}$$

т.е. искомое представление следующее

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} = (\nabla_q \nabla_p a^m + \nabla_n a^m \Gamma_{pq}^n) \mathbf{r}_m = (\nabla_q \nabla_p a_m + \nabla_n a_m \Gamma_{pq}^n) \mathbf{r}^m. \quad (2.5.88)$$

Меняя местами индексы  $p$  и  $q$  в (2.5.88), вычитая почленно получаемое равенство из (2.5.88) и учитывая симметричность символов Кристоффеля относительно нижних индексов, найдем

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = (\nabla_q \nabla_p a^m - \nabla_p \nabla_q a^m) \mathbf{r}_m = (\nabla_q \nabla_p a_m - \nabla_p \nabla_q a_m) \mathbf{r}^m. \quad (2.5.89)$$

В силу (2.5.78) и (2.5.89) имеем, например, соотношение

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = (\nabla_q \nabla_p a^m - \nabla_p \nabla_q a^m) \mathbf{r}_m = \mathbb{R}_{pql}^{\dots m} a_l \mathbf{r}_m. \quad (2.5.90)$$

На основании (2.5.90) можно утверждать, что  $\mathbb{R}_{pql}^{\dots m}$  являются компонентами тензора четвертого ранга.

Заметим, что обобщение, например, (2.5.90) на случай тензора с рангом больше единицы и пространства с размерностью больше трех не представляет большого труда. Поэтому на этом мы останавливаться не будем, а заинтересованного читателя отослем, например, к монографии [2].

По (2.5.90) легко заключаем справедливость следующей теоремы:

**Теорема 2.5.1.** *Операция обычного дифференцирования принадлежащего классу  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , тензора с рангом не меньше единицы и ковариантного дифференцирования компонент того же тензора перестановочна (коммутативна) тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = g_{mn} \mathbb{R}_{pql}^{\dots n} = 0 \quad (\mathbf{R} = \mathbb{R}_{pql}^{\dots m} \mathbf{r}^p \mathbf{r}^q \mathbf{r}^l \mathbf{r}_m = 0), \quad (2.5.91)$$

т.е. тензор Римана-Кристоффеля равен нулю.

Как видно из (2.5.77) и (2.5.87), компоненты тензора кривизны зависят только от символов Кристоффеля, а последние – только от производных компонент метрического тензора  $g_{mn}$  по координатам. Однако, как известно, в евклидовом пространстве постулируется существование таких систем координат, в которых компоненты метрического тензора постоянны во всем пространстве. Это, например, косоугольная система или ее частный случай – декартова прямоугольная система. Следовательно, в этих системах тензор Римана-Кристоффеля тождественно равен нулю. Но, если тензор равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю и в любой другой системе.

Таким образом, в евклидовом пространстве во всех системах координат тензор Римана-Кристоффеля тождественно равен нулю, а операция дифференцирования тензора класса  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , с рангом больше единицы во всех системах координат перестановочна. Заметим, что для римановых (неевклидовых) пространств тензор Римана-Кристоффеля может быть отличен от нуля.

Нетрудно доказать, что компоненты тензора Римана-Кристоффеля  $\mathbb{R}_{pqlm}^{\dots}$  обладают следующими основными свойствами:

1.  $\mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = -\mathbb{R}_{qplm}^{\dots}$ ,
  2.  $\mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = -\mathbb{R}_{pqml}^{\dots}$ ,
  3.  $\mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = \mathbb{R}_{lmpq}^{\dots}$ ,
  4.  $\mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} + \mathbb{R}_{qlpm}^{\dots} + \mathbb{R}_{lpqm}^{\dots} = 0$ .
- (2.5.92)

В самом деле, первое свойство очевидно, так как каждая из двух разностей, входящих в правую часть (2.5.87) кососимметрична относительно индексов  $p$  и  $q$ . Вторая разность в правой части (2.5.87) кососимметрична как относительно индексов  $p$  и  $q$ , так и относительно индексов  $l$  и  $m$ . Кроме того, она симметрична относительно пар индексов  $rq$  и  $lm$ .

Для доказательства второго и третьего свойств (2.5.92) необходимы дополнительные преобразования и вспомогательные соотношения, посредством которых легко доказать упомянутые выше свойства. В частности, преобразуем первую разность в правой части (2.5.87). Имеем

$$\begin{aligned}\partial_q \Gamma_{lp,m} &= \partial_q (\partial_p \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m) = \partial_q [\partial_p (\mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m) - \mathbf{r}_l \cdot \partial_p \mathbf{r}_m] = \partial_q (\partial_p g_{lm} - \Gamma_{mp,l}) = \\ &= \partial_q \partial_p g_{lm} - \partial_q \Gamma_{mp,l},\end{aligned}$$

т.е.

$$\partial_q \Gamma_{lp,m} = \partial_q \partial_p g_{lm} - \partial_q \Gamma_{mp,l}, \quad \partial_p \Gamma_{lq,m} = \partial_p \partial_q g_{lm} - \partial_p \Gamma_{mq,l}$$

где второе соотношение получено из первого при перестановке индексов  $p$  и  $q$ .

Вычитая из первого соотношения второе, получим первое искомое соотношение

$$\partial_q \Gamma_{lp,m} - \partial_p \Gamma_{lq,m} = -(\partial_q \Gamma_{mp,l} - \partial_p \Gamma_{mq,l}). \quad (2.5.93)$$

Из (2.5.93) видно, что первая разность в правой части (2.5.87) кососимметрична относительно индексов  $l$  и  $m$  и т.к. и вторая разность кососимметрична относительно тех же индексов, то второе свойство доказано.

Теперь первую разность в правой части (2.5.87) представим в другом виде. Имеем

$$\partial_q \Gamma_{lp,m} = \partial_q (\partial_p \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m) = \partial_q \partial_p \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m + \partial_p \mathbf{r}_l \cdot \partial_q \mathbf{r}_m + \partial_p \mathbf{r}_l \cdot \partial_q \mathbf{r}_m.$$

Переставляя в этом соотношении индексы  $p$  и  $q$  и вычитая полученное соотношение из существующего, приходим к второму искомому соотношению

$$\partial_q \Gamma_{lp,m} - \partial_p \Gamma_{lq,m} = \partial_q \mathbf{r}_m \cdot \partial_p \mathbf{r}_l - \partial_p \mathbf{r}_m \cdot \partial_q \mathbf{r}_l. \quad (2.5.94)$$

Меняя в нем местами пары индексов  $rq$  и  $lm$  и считая, что  $\partial_s \mathbf{r}_t = \partial_t \mathbf{r}_s$ , имеем

$$\partial_m \Gamma_{pl,q} - \partial_l \Gamma_{pm,q} = \partial_m \mathbf{r}_q \cdot \partial_l \mathbf{r}_p - \partial_l \mathbf{r}_q \cdot \partial_m \mathbf{r}_p = \partial_q \Gamma_{lp,m} - \partial_p \Gamma_{lq,m}. \quad (2.5.95)$$

В силу (2.5.95) утверждаем, что первая разность в правой части (2.5.87) симметрична относительно пар индексов  $rq$  и  $lm$ . Так как и вторая разность также симметрична относительно тех же пар индексов, то и третье свойство доказано.

Нетрудно заметить, что на основании (2.5.94) можно доказать кососимметричность первой разности в правой части (2.5.87) как относительно индексов  $p$  и  $q$ , так и относительно индексов  $l$  и  $m$ .

На доказательстве четвертого свойства (2.5.92), которое можно проверить непосредственно, мы останавливаться не будем. Заметим, что в указанной выше литературе можно найти иные пути доказательств этих свойств.

### 2.5.4 Тождества Ламе

Равенство нулю компонент тензора Римана-Кристоффеля (2.5.91) в трехмерном евклидовом пространстве дают 81 тождество. Однако, можно доказать, что вследствие существования у компонент тензора кривизны свойств симметрии (2.5.92) независимых тождеств получится только шесть. Эти тождества были получены Ламе за пятьдесят лет до возникновения тензорного анализа и носят его имя.

Получим тождества Ламе [8, 16]. С этой целью образуем компоненты тензора второго ранга

$$S^{kl} = \frac{1}{4} C^{\dots k p q} C^{\dots l s t} \mathbb{R}_{\dots p q s t}, \quad (2.5.96)$$

где  $C^{\dots k p q}$  — компоненты дискриминантного тензора. Умножая обе части (2.5.96) на  $C_{\dots i j k} C_{\dots m n l}$  с последующим суммированием по  $k$  и  $l$  и осуществляя простые выкладки, получим

$$\mathbb{R}_{\dots i j m n} = C_{\dots i j k} C_{\dots m n l} S^{k l}, \quad (2.5.97)$$

В силу (2.5.96) и (2.5.97) легко убеждаемся в справедливости следующего утверждения:

**Утверждение 2.5.1.** Для равенства нулю всех компонент тензора Римана-Кристоффеля необходимо и достаточно равенство нулю компонент тензора второго ранга  $S^{k l}$ .

Покажем, что  $S^{k l} = S^{l k}$ , т.е.  $S^{k l}$  — симметричная матрица. Из третьего свойства (2.5.92) имеем

$$S^{k l} = \frac{1}{4} C^{\dots k p q} C^{\dots l s t} \mathbb{R}_{\dots p q s t} = \frac{1}{4} C^{\dots k p q} C^{\dots l s t} \mathbb{R}_{\dots s t p q} = \frac{1}{4} C^{\dots l s t} C^{\dots k p q} \mathbb{R}_{\dots s t p q} = S^{l k}.$$

Таким образом, среди компонент тензора Римана-Кристоффеля независимых компонент только шесть (2.5.96), а остальные компоненты выражаются через эти шесть компонент посредством (2.5.97). Поэтому тождественное равенство нулю тензора Римана-Кристоффеля дает всего шесть независимых тождеств, которые называются тождествами Ламе. Итак, искомые тождества получим, если элементы матрицы  $S^{k l}$  приравняем нулю, т.е.

$$S^{k l} = \frac{1}{4} C^{\dots k p q} C^{\dots l s t} \mathbb{R}_{\dots p q s t} = 0,$$

или в матричном виде

$$\text{matr}(S^{k l}) = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{2323} & \mathbb{R}_{2331} & \mathbb{R}_{2312} \\ \mathbb{R}_{3123} & \mathbb{R}_{3131} & \mathbb{R}_{3112} \\ \mathbb{R}_{1223} & \mathbb{R}_{1231} & \mathbb{R}_{1212} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.5.98)$$

Учитывая симметричность  $S^{k l}$ , тождества Ляме можно представить в виде следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{2323} &= 0, & \mathbb{R}_{3131} &= 0, & \mathbb{R}_{1212} &= 0, \\ \mathbb{R}_{2331} &= 0, & \mathbb{R}_{2312} &= 0, & \mathbb{R}_{3112} &= 0. \end{aligned}$$

Следует заметить, что вышеприведенную теорему можно сформулировать и по другому.

**Теорема 2.5.2.** Для коммутативности операции обычного дифференцирования принадлежащего классу  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , тензора ранга не меньше единицы и ковариантного дифференцирования компонент того же тензора, необходимо и достаточно выполнение тождеств Ламе.

Сформулируем еще одну теорему.

**Теорема 2.5.3.** Для коммутативности операции обычного дифференцирования принадлежащего классу  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , тензора, необходимо и достаточно коммутативность операции ковариантного дифференцирования компонент того же тензора.

Теперь представим тождества Ламе в удобном для дальнейшего пользования виде. В этой связи заметим что,

$$S^{kl} \sim (S^{KL}, S^{K3}, S^{33}). \quad (2.5.99)$$

Тогда тождества Ламе приобретут вид

$$S^{KL} = 0, \quad S^{K3} = 0, \quad S^{33} = 0. \quad (2.5.100)$$

В силу (2.5.96) левые части (2.5.100) представляются в виде

$$S^{KL} = C_{\cdot\cdot K}^{KP} C_{\cdot\cdot L}^{LS} \mathbb{R}_{P3S3}, \quad S^{K3} = \frac{1}{2} C_{\cdot\cdot K}^{KP} C_{\cdot\cdot T}^{ST} \mathbb{R}_{P3ST}, \quad S^{33} = \frac{1}{4} C_{\cdot\cdot P}^{PQ} C_{\cdot\cdot T}^{ST} \mathbb{R}_{PQST}. \quad (2.5.101)$$

Аналогично из (2.5.97) получим обратные к (2.5.101) соотношения. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{P3S3} &= C_{\cdot\cdot K}^{PK} C_{\cdot\cdot L}^{SL} S^{KL}, \quad \mathbb{R}_{P3ST} = \mathbb{R}_{\cdot\cdot ST}^{\cdot\cdot P3} = C_{\cdot\cdot T}^{ST} C_{\cdot\cdot K}^{KP} S^{K3}, \\ \mathbb{R}_{PQST} &= C_{\cdot\cdot P}^{PQ} C_{\cdot\cdot T}^{ST} S^{33} = \epsilon_{PQ}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \epsilon_{ST}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \mathbb{R}_{1212}. \end{aligned} \quad (2.5.102)$$

Следует заметить, что соотношения (2.5.102) можно было получить и непосредственно из соответствующих соотношений (2.5.101), разрешая их относительно искомых величин.

Очевидно, тождества Ламе получаются, приравнивая нулю как соотношений (2.5.101), так и соотношений (2.5.102). Таким образом, в силу (2.5.99)–(2.5.102) заключаем, что

$$\mathbb{R}_{pqst}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \sim (\mathbb{R}_{P3S3}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}, \mathbb{R}_{P3ST}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}, \mathbb{R}_{PQST}^{\cdot\cdot\cdot\cdot})$$

и тождества Ламе можно представить и в виде

$$\mathbb{R}_{P3S3}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = 0, \quad \mathbb{R}_{P3ST}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = 0, \quad \mathbb{R}_{PQST}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = 0. \quad (2.5.103)$$

Этим мы будем пользоваться в дальнейшем для вывода аналогичных соотношений при новой параметризации области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.6 О тензорах Римана-Кристоффеля при новой параметризации области тонкого тела в $\mathbb{R}^3$

Как известно, при новой параметризации области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$  представление произвольного вектора  $\mathbf{A}$  дается соотношением (2.1.54). Поэтому в рассматриваемом случае, например, соотношение (2.5.90) представится в виде

$$\partial_q \partial_p \mathbf{A} - \partial_p \partial_q \mathbf{A} = (\nabla_q \nabla_p \mathbf{A}^{\tilde{m}} - \nabla_p \nabla_q \mathbf{A}^{\tilde{m}}) \mathbf{r}_{\tilde{m}} = \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\tilde{m}} A^{\tilde{l}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} = \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\tilde{t}} A^{\tilde{s}} \mathbf{r}_{\tilde{t}}, \quad \sim, \sim \in \{-, \infty, +\}.$$

Отсюда в силу (2.1.12) и подобных формул для компонент вектора аналогично (2.2.5) получаем

$$\mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}}^{\dots\tilde{m}} = g^{\tilde{m}\tilde{n}} \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}\tilde{n}}^{\dots} = g_{\tilde{l}}^{\check{s}} g_{\tilde{t}}^{\tilde{m}} \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\check{s}\tilde{t}}^{\dots\check{t}} = g_{\tilde{l}}^{\check{s}} g^{\tilde{m}\check{t}} \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\check{s}\tilde{t}}^{\dots}, \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, \infty, +\}, \quad (2.6.1)$$

где аналогично (2.5.77) и (2.5.87) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}}^{\dots\tilde{m}} &= \partial_q \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p}}^{\tilde{m}} - \partial_p \Gamma_{\tilde{l}\tilde{q}}^{\tilde{m}} + \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{n}\tilde{q}}^{\tilde{m}} - \Gamma_{\tilde{l}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{n}\tilde{p}}^{\tilde{m}}, \\ \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}\tilde{m}}^{\dots} &= \partial_q \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p},\tilde{m}} - \partial_p \Gamma_{\tilde{l}\tilde{q},\tilde{m}} + \Gamma_{\tilde{l}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{m}\tilde{p},\tilde{n}}^{\tilde{m}} - \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{m}\tilde{q},\tilde{n}}^{\tilde{m}}, \end{aligned} \quad \sim, \check{\sim} \in \{-, \infty, +\}. \quad (2.6.2)$$

Очевидно, представление тензора Римана-Кристоффеля при новой параметризации области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$  будет иметь вид

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}\tilde{m}}^{\dots} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{l}} \mathbf{r}^{\tilde{m}}, \quad \sim, \check{\sim}, \wedge, \vee \in \{-, \infty, +\}. \quad (2.6.3)$$

Закон перехода от одной системы координат к другой задается в виде специальной группы преобразования

$$x^{I'} = x^{I'}(x^1, x^2), \quad x^{3'} = x^3, \quad (2.6.4)$$

т.е. в дальнейшем, говоря о тензорах или о компонентах тензора, всегда будем полагать, что они являются тензорами или компонентами тензора относительно группы преобразования (2.6.4).

Ниже подробнее рассмотрим компоненты тензора Римана-Кристоффеля и тождества Ламе при различных семействах параметризаций области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$ . Иными словами, рассмотрим их в различных семействах базисов.

*Компоненты тензора Римана-Кристоффеля и тождества Ламе при  $S_{(-)}^{(-)}$ -семействе параметризации.* В этом случае ковариантные компоненты тензора Римана-Кристоффеля можно получить из второго соотношения (2.6.2) при  $\sim = -$ , т.е. имеем

$$\mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}\tilde{t}}^{\dots} = \partial_q \Gamma_{\tilde{s}\tilde{p},\tilde{t}}^{\tilde{m}} - \partial_p \Gamma_{\tilde{s}\tilde{p},\tilde{t}}^{\tilde{m}} + \Gamma_{\tilde{s}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{t}\tilde{p},\tilde{n}}^{\tilde{m}} - \Gamma_{\tilde{s}\tilde{p}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{t}\tilde{q},\tilde{n}}^{\tilde{m}}. \quad (2.6.5)$$

В рассматриваемом случае матричное соотношение (2.5.98), очевидно, представится в виде

$$\text{matr}(S^{\tilde{k}\tilde{l}}) = \overset{(-)}{g}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{\tilde{2}\tilde{3}\tilde{2}\tilde{3}}^{\dots} & \mathbb{R}_{\tilde{2}\tilde{3}\tilde{3}\tilde{1}}^{\dots} & \mathbb{R}_{\tilde{2}\tilde{3}\tilde{1}\tilde{2}}^{\dots} \\ \mathbb{R}_{\tilde{3}\tilde{1}\tilde{2}\tilde{3}}^{\dots} & \mathbb{R}_{\tilde{3}\tilde{1}\tilde{3}\tilde{1}}^{\dots} & \mathbb{R}_{\tilde{3}\tilde{1}\tilde{1}\tilde{2}}^{\dots} \\ \mathbb{R}_{\tilde{1}\tilde{2}\tilde{2}\tilde{3}}^{\dots} & \mathbb{R}_{\tilde{1}\tilde{2}\tilde{3}\tilde{1}}^{\dots} & \mathbb{R}_{\tilde{1}\tilde{2}\tilde{1}\tilde{2}}^{\dots} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.6.6)$$

Заметим сразу, что в рассматриваемом случае  $\partial_3 \mathbf{r}_{\tilde{s}} \neq \partial_s \mathbf{r}_{\tilde{3}}$ , поэтому третье свойство (2.5.92) компонент Римана-Кристоффеля  $\mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}\tilde{t}}^{\dots}$  не выполняется, если, например, один из индексов равен трем. В этой связи следует более подробно рассматривать матричное соотношение (2.6.6) и изучать в отдельности каждое его соотношение, выделяя из них существенные тождества Ламе, из которых в свою очередь получаются уравнения Гаусса и Петерсона-Кодадци.

Учитывая первое соотношение (2.4.4) и последнее соотношение (2.4.7), нетрудно заметить, что, если хотя бы один из индексов  $p$  и  $q$  равен трем, то компоненты тензора

Римана-Кристоффеля (2.6.5) равны нулю так, что в правой части (2.6.5) каждое слагаемое равно нулю. Отсюда заключаем, что соотношения, получаемые из первых двух строк (2.6.6) рассматривать не следует. Они выполняются, но ничего нового не дают. Остаются соотношения последней строки (2.6.6)

$$\mathbb{R}_{\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{3}} = 0, \quad \mathbb{R}_{\overline{1}\overline{2}\overline{3}\overline{1}} = 0, \quad \mathbb{R}_{\overline{1}\overline{2}\overline{1}\overline{2}} = 0, \quad (2.6.7)$$

являющиеся в рассматриваемом случае существенными тождествами Ламе. Учитывая, что

$$\mathbb{R}_{\overline{P}\overline{Q}\overline{S}3} = -\mathbb{R}_{\overline{P}\overline{Q}3\overline{S}} = 0, \quad \mathbb{R}_{\overline{P}\overline{Q}S\overline{T}} = \epsilon_{PQ}^{\cdot\cdot} \epsilon_{ST}^{\cdot\cdot} \mathbb{R}_{\overline{1}\overline{2}\overline{1}\overline{2}}, \quad (2.6.8)$$

соотношения (2.6.7) можно представить, например, в виде

$$\mathbb{R}_{\overline{P}\overline{Q}S\overline{T}} = 0, \quad \mathbb{R}_{\overline{P}\overline{Q}S\overline{3}} = 0, \quad (\mathbb{R}_{\overline{P}\overline{Q}S\overline{t}} = 0), \quad (2.6.9)$$

или

$$\mathbb{R}_{\overline{P}\overline{Q}\overline{S}\cdot\overline{T}} = 0, \quad \mathbb{R}_{\overline{P}\overline{Q}\cdot\overline{S}\overline{3}} = 0, \quad (\mathbb{R}_{\overline{P}\overline{Q}\cdot\overline{S}\overline{t}} = 0). \quad (2.6.10)$$

Итак, предметом нашего исследования является (2.6.9) или (2.6.10). Рассмотрим каждое соотношение в отдельности, например, в (2.6.9). Первое соотношение (2.6.9) в силу (2.6.5) представится в виде

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{R}_{\overline{P}\overline{Q}S\overline{T}} = \partial_Q \Gamma_{\overline{S}\overline{P},\overline{T}} - \partial_p \Gamma_{\overline{S}\overline{Q},\overline{T}} + \bar{\Gamma}_{\overline{S}\overline{Q}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{T}\overline{P},\overline{n}} - \bar{\Gamma}_{\overline{S}\overline{P}}^{\overline{n}} \Gamma_{\overline{T}\overline{Q},\overline{n}} = \\ &= \partial_Q \Gamma_{\overline{S}\overline{P},\overline{T}} - \partial_p \Gamma_{\overline{S}\overline{Q},\overline{T}} + \bar{\Gamma}_{\overline{S}\overline{Q}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{T}\overline{P},\overline{N}} + \bar{\Gamma}_{\overline{S}\overline{Q}}^{\overline{3}} \Gamma_{\overline{T}\overline{P},\overline{3}} - \bar{\Gamma}_{\overline{S}\overline{P}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{T}\overline{Q},\overline{N}} - \bar{\Gamma}_{\overline{S}\overline{P}}^{\overline{3}} \Gamma_{\overline{T}\overline{Q},\overline{3}} = \\ &= \partial_Q \Gamma_{\overline{S}\overline{P},\overline{T}} - \partial_p \Gamma_{\overline{S}\overline{Q},\overline{T}} + \bar{\Gamma}_{\overline{S}\overline{Q}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{T}\overline{P},\overline{N}} - \bar{\Gamma}_{\overline{S}\overline{P}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{T}\overline{Q},\overline{N}} + g^{\overline{3}\overline{k}} (\Gamma_{\overline{S}\overline{Q},k}^{\overline{-}} \Gamma_{\overline{T}\overline{P},\overline{3}} - \Gamma_{\overline{S}\overline{P},k}^{\overline{-}} \Gamma_{\overline{T}\overline{Q},\overline{3}}) = \\ &= \partial_Q \Gamma_{\overline{S}\overline{P},\overline{T}} - \partial_p \Gamma_{\overline{S}\overline{Q},\overline{T}} + \bar{\Gamma}_{\overline{S}\overline{Q}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{T}\overline{P},\overline{N}} - \bar{\Gamma}_{\overline{S}\overline{P}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{T}\overline{Q},\overline{N}} + g^{\overline{3}\overline{K}} (\Gamma_{\overline{S}\overline{Q},K}^{\overline{-}} \Gamma_{\overline{T}\overline{P},\overline{3}} - \Gamma_{\overline{S}\overline{P},K}^{\overline{-}} \Gamma_{\overline{T}\overline{Q},\overline{3}}) + \\ &\quad + g^{\overline{3}\overline{3}} (\Gamma_{\overline{S}\overline{Q},\overline{3}}^{\overline{-}} \Gamma_{\overline{T}\overline{P},\overline{3}} - \Gamma_{\overline{S}\overline{P},\overline{3}}^{\overline{-}} \Gamma_{\overline{T}\overline{Q},\overline{3}}). \end{aligned}$$

Далее, учитывая выражения символов Кристоффеля из (2.4.6), преобразуем последнее слагаемое в правой части этого соотношения. Имеем

$$\begin{aligned} g^{\overline{3}\overline{3}} (\Gamma_{\overline{S}\overline{Q},\overline{3}}^{\overline{-}} \Gamma_{\overline{T}\overline{P},\overline{3}} - \Gamma_{\overline{S}\overline{P},\overline{3}}^{\overline{-}} \Gamma_{\overline{T}\overline{Q},\overline{3}}) &= g^{\overline{3}\overline{3}} [\partial_Q g_{\overline{S}\overline{3}}^{\overline{-}} \partial_P g_{\overline{T}\overline{3}}^{\overline{-}} - \partial_P g_{\overline{S}\overline{3}}^{\overline{-}} \partial_Q g_{\overline{T}\overline{3}}^{\overline{-}} + \partial_Q g_{\overline{S}\overline{3}}^{\overline{-}} (g_{\overline{P}\overline{T}}^{\overline{-}} - g_{\overline{P}\overline{T}}^{\overline{+}}) - \\ &\quad - \partial_P g_{\overline{S}\overline{3}}^{\overline{-}} (g_{\overline{Q}\overline{T}}^{\overline{-}} - g_{\overline{Q}\overline{T}}^{\overline{+}}) + \partial_P g_{\overline{T}\overline{3}}^{\overline{-}} (g_{\overline{Q}\overline{S}}^{\overline{-}} - g_{\overline{Q}\overline{S}}^{\overline{+}}) - \partial_Q g_{\overline{T}\overline{3}}^{\overline{-}} (g_{\overline{P}\overline{S}}^{\overline{-}} - g_{\overline{P}\overline{S}}^{\overline{+}})] + \\ &\quad + g^{\overline{3}\overline{3}} [(g_{\overline{Q}\overline{S}}^{\overline{-}} - g_{\overline{Q}\overline{S}}^{\overline{+}}) (g_{\overline{P}\overline{T}}^{\overline{-}} - g_{\overline{P}\overline{T}}^{\overline{+}}) - (g_{\overline{P}\overline{S}}^{\overline{-}} - g_{\overline{P}\overline{S}}^{\overline{+}}) (g_{\overline{Q}\overline{T}}^{\overline{-}} - g_{\overline{Q}\overline{T}}^{\overline{+}})]. \end{aligned}$$

Учитывая последнее и предпоследнее соотношения и вводя обозначение

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\overline{P}\overline{Q}S\overline{T}} &= \partial_Q \Gamma_{\overline{S}\overline{P},\overline{T}} - \partial_p \Gamma_{\overline{S}\overline{Q},\overline{T}} + \bar{\Gamma}_{\overline{S}\overline{Q}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{T}\overline{P},\overline{N}} - \bar{\Gamma}_{\overline{S}\overline{P}}^{\overline{N}} \Gamma_{\overline{T}\overline{Q},\overline{N}} + g^{\overline{3}\overline{K}} (\Gamma_{\overline{S}\overline{Q},K}^{\overline{-}} \Gamma_{\overline{T}\overline{P},\overline{3}} - \\ &\quad - \Gamma_{\overline{S}\overline{P},K}^{\overline{-}} \Gamma_{\overline{T}\overline{Q},\overline{3}}) + g^{\overline{3}\overline{3}} [\partial_Q g_{\overline{S}\overline{3}}^{\overline{-}} \partial_P g_{\overline{T}\overline{3}}^{\overline{-}} - \partial_P g_{\overline{S}\overline{3}}^{\overline{-}} \partial_Q g_{\overline{T}\overline{3}}^{\overline{-}} + \partial_Q g_{\overline{S}\overline{3}}^{\overline{-}} (g_{\overline{P}\overline{T}}^{\overline{-}} - g_{\overline{P}\overline{T}}^{\overline{+}}) - \\ &\quad - \partial_P g_{\overline{S}\overline{3}}^{\overline{-}} (g_{\overline{Q}\overline{T}}^{\overline{-}} - g_{\overline{Q}\overline{T}}^{\overline{+}}) + \partial_P g_{\overline{T}\overline{3}}^{\overline{-}} (g_{\overline{Q}\overline{S}}^{\overline{-}} - g_{\overline{Q}\overline{S}}^{\overline{+}}) - \partial_Q g_{\overline{T}\overline{3}}^{\overline{-}} (g_{\overline{P}\overline{S}}^{\overline{-}} - g_{\overline{P}\overline{S}}^{\overline{+}})], \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

получим

$$\mathbb{R}_{\overline{PQST}}^{\dots\dots} = R_{\overline{PQST}}^{\dots\dots} + g^{\bar{3}\bar{3}} \left[ (g_{\bar{P}\bar{S}} - g_{\bar{P}\bar{S}}) (g_{\bar{Q}\bar{T}} - g_{\bar{Q}\bar{T}}) - (g_{\bar{P}\bar{S}} - g_{\bar{P}\bar{S}}) (g_{\bar{Q}\bar{T}} - g_{\bar{Q}\bar{T}}) \right] = 0.$$

Отсюда в свою очередь имеем

$$R_{\overline{PQST}}^{\dots\dots} = g^{\bar{3}\bar{3}} \left[ (g_{\bar{P}\bar{S}} - g_{\bar{P}\bar{S}}) (g_{\bar{Q}\bar{T}} - g_{\bar{Q}\bar{T}}) - (g_{\bar{Q}\bar{S}} - g_{\bar{Q}\bar{S}}) (g_{\bar{P}\bar{T}} - g_{\bar{P}\bar{T}}) \right]. \quad (2.6.12)$$

Правая часть (2.6.12) (как сумма произведений компонент ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела и с учетом того, что  $g^{\bar{3}\bar{3}}$  — инвариант) образует ковариантные компоненты тензора четвертого ранга. Поэтому и правая часть, выражющаяся еще в виде (2.6.11), является компонентами тензора четвертого ранга. Вспомним, что тензориальность величин рассматривается относительно группы преобразований (2.6.4).

Нетрудно доказать, что компоненты (2.6.11) обладают аналогичными (2.5.92) свойствами. В самом деле, эти свойства вытекают из соотношения (2.6.12), точнее из его правой части. Докажем их еще другим путем. В частности, преобразуем правую часть (2.6.12), приводя ее к такому виду, на основании которого легко доказываются приведенные выше свойства. Имеем

$$\begin{aligned} & (g_{\bar{P}\bar{S}} - g_{\bar{P}\bar{S}}) (g_{\bar{Q}\bar{T}} - g_{\bar{Q}\bar{T}}) - (g_{\bar{Q}\bar{S}} - g_{\bar{Q}\bar{S}}) (g_{\bar{P}\bar{T}} - g_{\bar{P}\bar{T}}) = \\ & = \epsilon_{PQ} \left[ (g_{\bar{1}\bar{S}} - g_{\bar{1}\bar{S}}) (g_{\bar{2}\bar{T}} - g_{\bar{2}\bar{T}}) - (g_{\bar{2}\bar{S}} - g_{\bar{2}\bar{S}}) (g_{\bar{1}\bar{T}} - g_{\bar{1}\bar{T}}) \right] = \\ & = \epsilon_{PQ} \epsilon^{KL} (g_{\bar{K}\bar{S}} - g_{\bar{K}\bar{S}}) (g_{\bar{L}\bar{T}} - g_{\bar{L}\bar{T}}). \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

Рассмотрим выражение

$$A_{\bar{S}\bar{T}} \equiv \epsilon^{KL} (g_{\bar{K}\bar{S}} - g_{\bar{K}\bar{S}}) (g_{\bar{L}\bar{T}} - g_{\bar{L}\bar{T}}) = -\epsilon^{LK} (g_{\bar{L}\bar{T}} - g_{\bar{L}\bar{T}}) (g_{\bar{K}\bar{S}} - g_{\bar{K}\bar{S}}) = -A_{\bar{T}\bar{S}}.$$

Итак,  $A_{\bar{S}\bar{T}}$  — кососимметрична матрица. Поэтому

$$A_{\bar{S}\bar{T}} = \epsilon^{ST} A_{\bar{1}\bar{2}} = \epsilon_{ST} \epsilon^{KL} (g_{\bar{K}\bar{1}} - g_{\bar{K}\bar{1}}) (g_{\bar{L}\bar{2}} - g_{\bar{L}\bar{2}}) = \epsilon^{ST} \det (g_{\bar{K}\bar{M}} - g_{\bar{K}\bar{M}}).$$

Учитывая последнее соотношение в (2.6.13), получим

$$(g_{\bar{P}\bar{S}} - g_{\bar{P}\bar{S}}) (g_{\bar{Q}\bar{T}} - g_{\bar{Q}\bar{T}}) - (g_{\bar{Q}\bar{S}} - g_{\bar{Q}\bar{S}}) (g_{\bar{P}\bar{T}} - g_{\bar{P}\bar{T}}) = \epsilon^{PQ} \epsilon_{ST} \det (g_{\bar{K}\bar{M}} - g_{\bar{K}\bar{M}}). \quad (2.6.14)$$

В силу (2.6.14) соотношение (2.6.12) представится в искомом виде

$$R_{\overline{PQST}}^{\dots\dots} = \epsilon^{PQ} \epsilon_{ST} g^{\bar{3}\bar{3}} \det (g_{\bar{K}\bar{M}} - g_{\bar{K}\bar{M}}). \quad (2.6.15)$$

Учитывая свойства символов Леви-Чивиты, из (2.6.15) видно, что компоненты  $R_{\overline{PQST}}^{\dots\dots}$  обладают аналогичными (2.5.92) свойствами. Заметим, что соотношение (2.6.15) является аналогом уравнения Гаусса при  $\overset{(-)}{S}_{\overset{(g)}{g}}$ -семействе параметризации области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$  в том случае, когда  $\mathbf{h}$  не перпендикулярен к базовыми поверхностями  $\overset{(-)}{S}$  и  $\overset{(+)}{S}$ .

Теперь найдем выражение детерминанта в правой части (2.6.15). Имеем

$$\begin{aligned} \det(g_{\bar{K}\bar{M}} - g_{\bar{K}\bar{M}}) &= \frac{1}{2} \epsilon^{KL} \epsilon^{MN} (g_{\bar{K}\bar{M}} - g_{\bar{K}\bar{M}})(g_{\bar{L}\bar{N}} - g_{\bar{L}\bar{N}}) = \\ &= \overset{(-)}{g} \frac{1}{2} C_{..}^{\bar{K}\bar{L}} C_{..}^{\bar{M}\bar{N}} (g_{\bar{K}\bar{M}} - g_{\bar{K}\bar{M}})(g_{\bar{L}\bar{N}} - g_{\bar{L}\bar{N}}) = \\ &= \overset{(-)}{g} \frac{1}{2} C_{..}^{\bar{K}\bar{L}} C_{..}^{\bar{M}\bar{N}} (g_{\bar{K}}^{\bar{M}} - g_{\bar{K}}^{\bar{M}})(g_{\bar{L}}^{\bar{N}} - g_{\bar{L}}^{\bar{N}}) = \overset{(-)}{g} \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}} - g_{\bar{I}}^{\bar{J}}) = \\ &= \overset{(-)}{g} \frac{1}{2} \epsilon_{..}^{KL} \epsilon_{MN}^{..} [g_{\bar{K}}^{\bar{M}} g_{\bar{L}}^{\bar{N}} - (g_{\bar{K}}^{\bar{M}} g_{\bar{L}}^{\bar{N}} + g_{\bar{L}\bar{N}} g_{\bar{K}\bar{M}}) + g_{\bar{K}}^{\bar{M}} g_{\bar{L}}^{\bar{N}}] = \overset{(-)}{g} [1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}})], \end{aligned}$$

т.е.

$$\det(g_{\bar{K}\bar{M}} - g_{\bar{K}\bar{M}}) = \overset{(-)}{g} \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}} - g_{\bar{I}}^{\bar{J}}) = \overset{(-)}{g} [1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}})]. \quad (2.6.16)$$

На основании (2.6.16) уравнение (2.6.15) получит более удобный вид

$$R_{\bar{P}\bar{Q}\bar{S}\bar{T}}^{\dots\dots\dots\dots} = C_{\bar{P}\bar{Q}}^{\dots\dots} R_{\bar{S}\bar{T}}^{\dots\dots} g^{\bar{3}\bar{3}} \det[1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}})]. \quad (2.6.17)$$

Заметим, что для получения уравнения Гаусса мы могли поступить иначе. В частности, первое соотношение (2.6.9) можно было представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\bar{P}\bar{Q}\bar{S}\bar{T}}^{\dots\dots\dots\dots} &= \partial_Q \Gamma_{\bar{S}\bar{P},\bar{T}}^{\bar{N}} - \partial_p \Gamma_{\bar{S}\bar{Q},\bar{T}}^{\bar{N}} + \Gamma_{\bar{S}\bar{Q}}^{\bar{N}} \Gamma_{\bar{T}\bar{P},\bar{N}}^{\bar{N}} - \Gamma_{\bar{S}\bar{P}}^{\bar{N}} \Gamma_{\bar{T}\bar{Q},\bar{N}}^{\bar{N}} + g_{\bar{3}\bar{K}} (\Gamma_{\bar{S}\bar{Q}}^{\bar{3}} \Gamma_{\bar{T}\bar{P}}^{\bar{K}} - \Gamma_{\bar{S}\bar{P}}^{\bar{3}} \Gamma_{\bar{T}\bar{Q}}^{\bar{K}}) + \\ &+ g_{\bar{3}\bar{3}} (\Gamma_{\bar{S}\bar{Q}}^{\bar{3}} \Gamma_{\bar{T}\bar{P}}^{\bar{3}} - \Gamma_{\bar{S}\bar{P}}^{\bar{3}} \Gamma_{\bar{T}\bar{Q}}^{\bar{3}}) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, вводя обозначение

$$\mathbb{R}_{\bar{P}\bar{Q}\bar{S}\bar{T}}^{\dots\dots\dots\dots} = \partial_Q \Gamma_{\bar{S}\bar{P},\bar{T}}^{\bar{N}} - \partial_p \Gamma_{\bar{S}\bar{Q},\bar{T}}^{\bar{N}} + \Gamma_{\bar{S}\bar{Q}}^{\bar{N}} \Gamma_{\bar{T}\bar{P},\bar{N}}^{\bar{N}} - \Gamma_{\bar{S}\bar{P}}^{\bar{N}} \Gamma_{\bar{T}\bar{Q},\bar{N}}^{\bar{N}} + g_{\bar{3}\bar{K}} (\Gamma_{\bar{S}\bar{Q}}^{\bar{3}} \Gamma_{\bar{T}\bar{P}}^{\bar{K}} - \Gamma_{\bar{S}\bar{P}}^{\bar{3}} \Gamma_{\bar{T}\bar{Q}}^{\bar{K}}),$$

имеем

$$R_{\bar{P}\bar{Q}\bar{S}\bar{T}}^{\dots\dots\dots\dots} = g_{\bar{3}\bar{3}} (\Gamma_{\bar{P}\bar{S}}^{\bar{3}} \Gamma_{\bar{Q}\bar{T}}^{\bar{3}} - \Gamma_{\bar{Q}\bar{S}}^{\bar{3}} \Gamma_{\bar{P}\bar{T}}^{\bar{3}}). \quad (2.6.18)$$

Теперь, умножая обе части последнего соотношения (2.5.13) на  $C_{\bar{P}\bar{Q}}^{\dots\dots} C_{\bar{S}\bar{T}}^{\dots\dots}$  и учитывая свойства компонент дискриминантного тензора, получим

$$\begin{aligned} g^{\check{3}\check{3}} K C_{\bar{P}\bar{Q}}^{\dots\dots} C_{\bar{S}\bar{T}}^{\dots\dots} &= \frac{1}{2} C_{\bar{P}\bar{Q}}^{\dots\dots} C_{\bar{S}\bar{T}}^{\check{I}\check{J}} C_{\bar{S}\bar{T}}^{\dots\dots} C_{\bar{I}\bar{L}}^{\check{L}\check{M}} \Gamma_{\bar{I}\bar{L}}^{\check{3}} \Gamma_{\bar{J}\bar{M}}^{\check{3}} = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_P^I \delta_Q^J - \delta_P^J \delta_Q^I) (\delta_S^L \delta_T^M - \delta_S^M \delta_T^L) \Gamma_{\bar{I}\bar{L}}^{\check{3}} \Gamma_{\bar{J}\bar{M}}^{\check{3}} = \Gamma_{\bar{P}\bar{S}}^{\check{3}} \Gamma_{\bar{Q}\bar{T}}^{\check{3}} - \Gamma_{\bar{P}\bar{T}}^{\check{3}} \Gamma_{\bar{Q}\bar{S}}^{\check{3}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$g^{\check{3}\check{3}} K C_{\bar{P}\bar{Q}}^{\dots\dots} C_{\bar{S}\bar{T}}^{\dots\dots} = \Gamma_{\bar{P}\bar{S}}^{\check{3}} \Gamma_{\bar{Q}\bar{T}}^{\check{3}} - \Gamma_{\bar{P}\bar{T}}^{\check{3}} \Gamma_{\bar{Q}\bar{S}}^{\check{3}}, \quad \check{\phantom{x}} \in \{-, \infty, +\}. \quad (2.6.19)$$

В силу (2.6.19), предварительно записывая его при  $\check{\phantom{x}} = -$ , соотношение (2.6.18) представляется в виде

$$R_{\bar{P}\bar{Q}\bar{S}\bar{T}}^{\dots\dots\dots\dots} = g_{\bar{3}\bar{3}} g^{\bar{3}\bar{3}} K C_{\bar{P}\bar{Q}}^{\dots\dots} C_{\bar{S}\bar{T}}^{\dots\dots}. \quad (2.6.20)$$

Сравнивая (2.6.20) с (2.6.17), можно утверждать, что

$$\overset{(-)}{K} = g_{\bar{3}\bar{3}}^{-1} [1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}})] = h^{-2} (1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \overset{(+)}{\vartheta}). \quad (2.6.21)$$

На основании второго соотношения (2.5.16) и (2.6.21), заключаем, что гауссова кривизна  $\overset{(-)}{K}$  в том случае, когда  $\mathbf{h}$  не перпендикулярен  $\overset{(-)}{S}$ , имеет такое же выражение, что и при  $\mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}$ , несмотря на то, что основные компоненты переноса ЕТВР при рассматриваемых случаях имеют различные значения.

Теперь рассмотрим второе соотношение (2.6.9). Это соотношение в силу (2.6.5) можно записать в форме

$$\mathbb{R}_{\bar{P}\bar{Q}\bar{S}\bar{3}}^{\dots\dots} = \partial_Q \Gamma_{\bar{S}\bar{P},\bar{3}} - \partial_P \Gamma_{\bar{S}\bar{Q},\bar{3}} + \Gamma_{\bar{S}\bar{Q}}^{\bar{n}} \Gamma_{\bar{3}\bar{P},\bar{n}} - \Gamma_{\bar{S}\bar{P}}^{\bar{n}} \Gamma_{\bar{3}\bar{Q},\bar{n}} = 0. \quad (2.6.22)$$

Записывая (2.4.6) при  $\sim = -$ , имеем

$$\begin{aligned} \partial_Q \Gamma_{\bar{S}\bar{P},\bar{3}} &= \partial_Q \partial_P g_{\bar{S}\bar{3}} + \partial_Q (g_{\bar{P}\bar{S}} - g_{\bar{P}\bar{S}}), \\ \partial_P \Gamma_{\bar{S}\bar{Q},\bar{3}} &= \partial_P \partial_Q g_{\bar{S}\bar{3}} + \partial_P (g_{\bar{Q}\bar{S}} - g_{\bar{Q}\bar{S}}). \end{aligned}$$

Вычитая из первого соотношения почленно второе, получим

$$\partial_Q \Gamma_{\bar{S}\bar{P},\bar{3}} - \partial_P \Gamma_{\bar{S}\bar{Q},\bar{3}} = \partial_Q (g_{\bar{P}\bar{S}} - g_{\bar{P}\bar{S}}) - \partial_P (g_{\bar{Q}\bar{S}} - g_{\bar{Q}\bar{S}}). \quad (2.6.23)$$

Аналогично, представляя второе соотношение (2.4.4) при  $\sim = -$ , а потом учитывая во второй разности (2.6.22), будем иметь

$$\Gamma_{\bar{S}\bar{Q}}^{\bar{n}} \Gamma_{\bar{3}\bar{P},\bar{n}} - \Gamma_{\bar{S}\bar{P}}^{\bar{n}} \Gamma_{\bar{3}\bar{Q},\bar{n}} = \Gamma_{\bar{S}\bar{Q}}^{\bar{n}} (g_{\bar{P}\bar{n}} - g_{\bar{P}\bar{n}}) - \Gamma_{\bar{S}\bar{P}}^{\bar{n}} (g_{\bar{Q}\bar{n}} - g_{\bar{Q}\bar{n}}). \quad (2.6.24)$$

Подставляя (2.6.23) и (2.6.24) в (2.6.22) и, кроме того, добавляя и вычитая выражение  $(g_{\bar{n}\bar{S}} - g_{\bar{n}\bar{S}}) \Gamma_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{n}}$ , получим

$$\mathbb{R}_{\bar{P}\bar{Q}\bar{S}\bar{3}}^{\dots\dots} = \bar{\nabla}_P (g_{\bar{Q}\bar{S}} - g_{\bar{Q}\bar{S}}) - \bar{\nabla}_Q (g_{\bar{P}\bar{S}} - g_{\bar{P}\bar{S}}) = 0.$$

Отсюда в свою очередь имеем

$$\bar{\nabla}_P (g_{\bar{Q}\bar{S}} - g_{\bar{Q}\bar{S}}) = \bar{\nabla}_Q (g_{\bar{P}\bar{S}} - g_{\bar{P}\bar{S}}), \quad \bar{\nabla}_P (g_{\bar{Q}}^{\bar{S}} - g_{\bar{Q}}^{\bar{S}}) = \bar{\nabla}_Q (g_{\bar{P}}^{\bar{S}} - g_{\bar{P}}^{\bar{S}}), \quad (2.6.25)$$

или, учитывая, что

$$\bar{\nabla}_P g_{\bar{Q}\bar{S}} = 0, \quad \bar{\nabla}_P g_{\bar{Q}\bar{S}} = 0, \quad (2.6.26)$$

из (2.6.25) получим

$$\bar{\nabla}_P g_{\bar{Q}\bar{S}} = \bar{\nabla}_Q g_{\bar{P}\bar{S}}, \quad \bar{\nabla}_P g_{\bar{Q}}^{\bar{S}} = \bar{\nabla}_Q g_{\bar{P}}^{\bar{S}}. \quad (2.6.27)$$

Здесь  $\bar{\nabla}_P$  — оператор (пространственный) ковариантного дифференцирования при  $S_{(g)}^{(-)}$ -семействе параметризации области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$ .

Соотношения (2.6.25), или получаемые из них соотношения (2.6.27), представляют аналог уравнений Петерсона-Кодащи при  $S_{(g)}^{(-)}$ -семействе параметризации области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$ .

Очевидно, если бы мы исходили из соотношений (2.6.10), то получили те же самые соотношения.

Учитывая, что

$$\bar{\nabla}_K \mathbf{r}_{\underline{L}} = 0 \quad (\bar{\nabla}_K \mathbf{r}^{\bar{L}} = 0), \quad (2.6.28)$$

из первого (второго) соотношения (2.6.25) получаем

$$(\bar{\nabla}_P (\mathbf{r}_{\underline{Q}}^{+} - \mathbf{r}_{\underline{Q}}^{-}) = \bar{\nabla}_Q (\mathbf{r}_{\underline{P}}^{+} - \mathbf{r}_{\underline{P}}^{-})) \Rightarrow (\bar{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{h} = \bar{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{h}), \quad (2.6.29)$$

а из первого (второго) соотношения (2.6.27) имеем

$$\bar{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{r}^{(-)} = \bar{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{r}^{(+)}. \quad (2.6.30)$$

Заметим, что в силу (2.6.28) имеет место следствие

$$(\bar{\nabla}_P \mathbf{r}_{\underline{Q}} = \bar{\nabla}_Q \mathbf{r}_{\underline{P}} = 0) \Rightarrow (\bar{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{r}^{(-)} = \bar{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{r}^{(-)}). \quad (2.6.31)$$

Теперь, умножая обе части последнего равенства (2.6.29) на  $x^3$  и потом прибавляя почленно к второму равенству (2.6.31), будем иметь

$$\bar{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{r} = \bar{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{r}. \quad (2.6.32)$$

Очевидно, исходя из (2.6.32), при  $x^3 = 0$  получаем (2.6.31), а при  $x^3 = 1$  (2.6.30). Вычитая из (2.6.30) почленно (2.6.31), получим (2.6.29). Далее умножая скалярно обе части (2.6.29), (2.6.31) и (2.6.30) на  $\mathbf{r}_{\underline{S}} (\mathbf{r}^{\bar{S}})$  и учитывая (2.6.28), получим первые (вторые) соотношения (2.6.25) – (2.6.27) соответственно.

Таким образом, имея соотношение (2.6.32), можно получить (2.6.25), (2.6.27), (2.6.29) и (2.6.30).

В силу (2.6.26) можно записать

$$\bar{\nabla}_P g_{\underline{Q}\underline{S}} = \bar{\nabla}_Q g_{\underline{P}\underline{S}}, \quad \bar{\nabla}_P g_{\underline{Q}}^{\bar{S}} = \bar{\nabla}_Q g_{\underline{P}}^{\bar{S}}. \quad (2.6.33)$$

Теперь, умножая обе части соотношений (2.6.33) на  $1 - x^3$ , а соотношений (2.6.27) на  $x^3$ , и складывая полученные соотношения почленно, имеем

$$\bar{\nabla}_P g_{\underline{Q}\underline{S}} = \bar{\nabla}_Q g_{\underline{P}\underline{S}}, \quad \bar{\nabla}_P g_{\underline{Q}}^{\bar{S}} = \bar{\nabla}_Q g_{\underline{P}}^{\bar{S}}. \quad (2.6.34)$$

Следует заметить, что аналогичное второму соотношению (2.6.34) соотношение при классической параметризации (когда в качестве базовой рассматривается срединная поверхность) области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$  приведено в монографии [26] (соотношение (1.3.44)).

Заметим также, что компоненты тензора Римана-Кристоффеля и тождества Ламе при  $S_{(-)}^{(g)}$ -семействе параметризации области тонкого тела рассматриваются совершенно аналогично рассмотренному случаю, поэтому на этом случае мы останавливаться не будем. Ниже рассмотрим их при  $S_g$ -семействе параметризации области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$ .

*Компоненты тензора Римана-Кристоффеля и тождество Ламе при  $S_g$ -семействе параметризации.* В рассматриваемом случае чисто ковариантные компоненты тензора Римана-Кристоффеля получим из второго соотношения (2.6.2) при  $\sim = \emptyset$

$$\mathbb{R}_{pqst}^{\dots\dots} = \partial_q \Gamma_{sp,t} - \partial_p \Gamma_{sq,t} + \Gamma_{sq}^n \Gamma_{tp,n} - \Gamma_{sp}^n \Gamma_{tq,n}. \quad (2.6.35)$$

Эти компоненты обладают свойствами, аналогичными (2.5.92), поэтому в этом случае тождество Ламе представляются в виде соотношений (2.5.103). Наша задача заключается в рассмотрении каждого из них.

Учитывая (2.6.35), первое соотношение (2.5.103) можно записать в виде

$$\mathbb{R}_{P3S3}^{\dots\dots} = \partial_3 \Gamma_{SP,3} - \partial_P \Gamma_{S3,3} + \Gamma_{S3}^n \Gamma_{3P,n} - \Gamma_{SP}^n \Gamma_{33,n} = 0. \quad (2.6.36)$$

На основании (2.4.4), (2.4.6) и (2.4.7) из (2.4.8), производя простые выкладки, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{SP,3} &= \Gamma_{PS,3} = \partial_P g_{S3} - g_S^k (g_{+}^k - g_{-}^k), & \Gamma_{S3,3} &= \Gamma_{3S,3} = \partial_3 g_{S3} = g_{+}^k - g_{-}^k, \\ \Gamma_{S3}^n &= \Gamma_{3S}^n = g_{-}^n (g_{+}^k - g_{-}^k), & \Gamma_{P3,n} &= \Gamma_{3P,n} = g_{nm}^k (g_{+}^m - g_{-}^m), & \Gamma_{33,n} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.37)$$

Подставляя (2.6.36) в (2.6.35), имеем

$$(\mathbb{R}_{P3S3}^{\dots\dots} = 0) \Rightarrow [\partial_P (g_{+}^k - g_{-}^k) - \partial_S (g_{+}^k - g_{-}^k) = 0].$$

Отсюда добавляя и вычитая недостающие до ковариантных производных слагаемые, будем иметь

$$\bar{\nabla}_P (g_{+}^k - g_{-}^k) = \bar{\nabla}_S (g_{+}^k - g_{-}^k),$$

или

$$\hat{\nabla}_P (g_{+}^k - g_{-}^k) = \hat{\nabla}_S (g_{+}^k - g_{-}^k), \quad (2.6.38)$$

где  $\hat{\nabla}_P$  — оператор (пространственный) ковариантного дифференцирования при  $S_g$ -семействе параметризации области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$ .

Теперь рассмотрим второе соотношение (2.5.103). Так как  $\mathbb{R}_{P3ST}^{\dots\dots} = \mathbb{R}_{STP3}^{\dots\dots}$ , то вместо упомянутого соотношения можно рассматривать  $\mathbb{R}_{PQS3}^{\dots\dots} = 0$ , которое в силу (2.6.35) представится в виде

$$\mathbb{R}_{PQS3}^{\dots\dots} = \partial_Q \Gamma_{SP,3} - \partial_P \Gamma_{SQ,3} + \Gamma_{SQ}^n \Gamma_{3P,n} - \Gamma_{SP}^n \Gamma_{3Q,n} = 0.$$

Учитывая соответствующие соотношения (2.6.37), после простых преобразований получим

$$(\mathbb{R}_{PQS3}^{\dots\dots} = 0) \Rightarrow [\hat{\nabla}_P (g_{+}^k - g_{-}^k) = \hat{\nabla}_Q (g_{+}^k - g_{-}^k)]. \quad (2.6.39)$$

Нетрудно заметить, что (2.6.38) и (2.6.39) можно объединить и представить одним соотношением

$$\hat{\nabla}_P(g_{\overset{+}{Q}} - g_{\overset{-}{Q}}) = \hat{\nabla}_Q(g_{\overset{+}{P}} - g_{\overset{-}{P}}), \quad (2.6.40)$$

или

$$\hat{\nabla}_P(g_{\overset{+}{Q}}^s - g_{\overset{-}{Q}}^s) = \hat{\nabla}_Q(g_{\overset{+}{P}}^s - g_{\overset{-}{P}}^s). \quad (2.6.41)$$

Из (2.6.40) и (2.6.41) посредством элементарных преобразований следуют соотношения

$$\hat{\nabla}_P g_{\check{Q}s} = \hat{\nabla}_Q g_{\check{P}s}, \quad \hat{\nabla}_P g_{\check{Q}}^s = \hat{\nabla}_Q g_{\check{P}}^s, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (2.6.42)$$

Соотношения (2.6.40)–(2.6.42) представляют аналоги уравнений Петерсона-Кодаци, представленных в различных формах, при  $S_g$ -семействе параметризации области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$ .

Теперь, учитывая, что  $\hat{\nabla}_M \mathbf{r}_n = 0$ ,  $\hat{\nabla}_M \mathbf{r}^n = 0$ , из (2.6.40) или (2.6.41) получаем

$$[\hat{\nabla}_P(\mathbf{r}_{\overset{+}{Q}} - \mathbf{r}_{\overset{-}{Q}}) = \hat{\nabla}_Q(\mathbf{r}_{\overset{+}{P}} - \mathbf{r}_{\overset{-}{P}})] \Rightarrow (\hat{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{h} = \hat{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{h}), \quad (2.6.43)$$

а из (2.6.42) имеем

$$\hat{\nabla}_P \partial_Q \overset{(-)}{\mathbf{r}} = \hat{\nabla}_Q \partial_P \overset{(-)}{\mathbf{r}}, \quad \hat{\nabla}_P \partial_Q \overset{(+)}{\mathbf{r}} = \hat{\nabla}_Q \partial_P \overset{(+)}{\mathbf{r}}. \quad (2.6.44)$$

Умножая обе части первого соотношения (2.6.44) на  $1 - x^3$ , а второго на  $x^3$  и потом складывая их почленно, имеем

$$\hat{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{r} = \hat{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{r}. \quad (2.6.45)$$

Заметим, что (2.6.45) можно еще получить, если обе части последнего равенства (2.6.43) умножить на  $x^3$  и потом прибавить почленно к первому соотношению (2.6.44). Кроме того, соотношение (2.6.43) является следствием соотношений (2.6.44). В самом деле, вычитая из второго равенства (2.6.44) почленно первое, получим (2.6.43).

Нетрудно усмотреть, что имея соотношение (2.6.45), можно получить все соотношения (2.6.40)–(2.6.44).

Остается рассмотреть третье соотношение (2.5.103). В силу (2.6.35) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{R}_{PQST}^{\dots\dots} = \partial_Q \Gamma_{SP,T} - \partial_P \Gamma_{SQ,T} + \Gamma_{SQ}^n \Gamma_{TP,n} - \Gamma_{SP}^n \Gamma_{TQ,n} = \partial_Q \Gamma_{SP,T} - \partial_P \Gamma_{SQ,T} + \\ &+ \Gamma_{SQ}^N \Gamma_{TP,N} - \Gamma_{SP}^N \Gamma_{TQ,N} + \Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP,3} - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ,3} = \partial_Q \Gamma_{SP,T} - \partial_P \Gamma_{SQ,T} + \Gamma_{SQ}^N \Gamma_{TP,N} - \\ &- \Gamma_{SP}^N \Gamma_{TQ,N} + g_{3K}(\Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^K - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^K) + g_{33}(\Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^3 - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^3). \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\mathbf{R}_{PQST}^{\dots\dots} = \partial_Q \Gamma_{SP,T} - \partial_P \Gamma_{SQ,T} + \Gamma_{SQ}^N \Gamma_{TP,N} - \Gamma_{SP}^N \Gamma_{TQ,N} + g_{3K}(\Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^K - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^K) \quad (2.6.46)$$

из предыдущего соотношения получаем

$$\mathbb{R}_{PQST}^{\dots\dots} = \mathbf{R}_{PQST}^{\dots\dots} + g_{33}(\Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^3 - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^3) = 0.$$

Отсюда в свою очередь следует

$$\mathbf{R}_{PQST}^{\dots\dots} = g_{33}(\Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^3 - \Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^3). \quad (2.6.47)$$

Учитывая в правой части (2.6.47) значение разности произведений символов Кристоффеля из (2.6.19) при  $\cup = \emptyset$ , будем иметь

$$\mathbf{R}_{PQST}^{\dots\dots} = g_{33}g^{33}KC_{PQ}^{\dots}C_{ST}^{\dots}. \quad (2.6.48)$$

Очевидно, в силу (2.6.48) можно утверждать, что (2.6.46) являются компонентами тензора четвертого ранга относительно группы преобразований (2.6.4), а также то, что они обладают свойствами, аналогичным (2.5.92).

Поступая так же, как и при выводе соотношения (2.6.12), в рассматриваемом случае аналогичное соотношение представится в виде

$$\mathbf{R}_{PQST}^{\dots\dots} = g^{33}[(g_{-PS}^{} - g_{+PS}^{}) (g_{-QT}^{} - g_{+QT}^{}) - (g_{-QS}^{} - g_{+QS}^{}) (g_{-PT}^{} - g_{+PT}^{})]. \quad (2.6.49)$$

Далее, преобразуя правую часть (2.6.49) аналогично правой части (2.6.12), получим

$$\mathbf{R}_{PQST}^{\dots\dots} = \epsilon_{PQ}\epsilon_{ST}g^{33} \det(g_{-MN}^{} - g_{+MN}^{}). \quad (2.6.50)$$

Нетрудно заметить, что для определителя в правой части (2.6.50) имеем

$$\begin{aligned} \det(g_{-MN}^{} - g_{+MN}^{}) &= \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}\epsilon^{KL}(g_{-IK}^{} - g_{+IK}^{})(g_{-JL}^{} - g_{+JL}^{}) = \frac{1}{2}gC^{IJ}C^{KL}(g_{-IK}^{} - \\ &- g_{+IK}^{})(g_{-JL}^{} - g_{+JL}^{}) = \frac{1}{2}gC^{IJ}C^{KL}(g_{\bar{I}}^K - g_{\bar{I}}^L)(g_{\bar{J}}^L - g_{\bar{J}}^K) = g \det(g_{\bar{I}}^K - g_{\bar{I}}^L), \end{aligned}$$

т.е.

$$\det(g_{-MN}^{} - g_{+MN}^{}) = g \det(g_{\bar{I}}^K - g_{\bar{I}}^L). \quad (2.6.51)$$

Учитывая (2.6.51) и (2.6.50), получим

$$\mathbf{R}_{PQST}^{\dots\dots} = C_{PQ}^{\dots}C_{ST}^{\dots}g^{33} \det(g_{\bar{I}}^K - g_{\bar{I}}^L). \quad (2.6.52)$$

Сравнивая (2.6.48) и (2.6.52), заключаем, что

$$K = g_{33}^{-1} \det(g_{\bar{I}}^K - g_{\bar{I}}^L). \quad (2.6.53)$$

Придадим (2.6.53) другой вид. В этой связи в правой части (2.6.53) преобразуем определитель. В силу (2.1.16), (2.1.18) и (2.6.16) имеем

$$\det(g_{\bar{I}}^K - g_{\bar{I}}^L) = \det[g_{\bar{J}}^K(g_{\bar{I}}^{\bar{J}} - g_{\bar{I}}^{\bar{J}})] = \det(g_{\bar{L}}^K) \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}} - g_{\bar{I}}^{\bar{J}}) = \vartheta^{(-1)}[1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}})]. \quad (2.6.54)$$

Подставляя (2.6.54) в (2.6.53) и учитывая (2.6.21), найдем искомые выражения для  $K$ , а именно

$$K = \vartheta^{(-1)}g_{33}^{-1}[1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}})] = \vartheta^{(-1)}\overset{(-)}{K}. \quad (2.6.55)$$

На основании (2.6.55) заключаем, что второе соотношение (2.5.25) имеет место и в том случае, когда  $\mathbf{h}$  не перпендикулярен  $\overset{(-)}{S}$ .

Ниже приведем формулировку фундаментальной теоремы теории поверхностей и резюмируя изложенное выше, дадим формулировку аналогичной теоремы для области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$ .

**Теорема 2.6.1.** (*Фундаментальная теорема теории поверхностей*) *Наличие двух любых тензоров*

$$\underline{\mathbf{E}} = g_{IJ} \mathbf{r}^I \mathbf{r}^J, \quad \underline{\mathbf{b}} = b_{IJ} \mathbf{r}^I \mathbf{r}^J,$$

*первый из которых является положительно определенным и компоненты которых связаны между собой уравнениями Гаусса и Петерсона-Кодацци, необходимо и достаточно для существования, и при этом единственной, с точностью до движения в  $\mathbb{R}^3$  некоторой регулярной поверхности, для которой эти тензоры являются первым и вторым тензорами.*

Заметим, что необходимая часть этой теоремы — теорема Бонне [6, 20].

**Теорема 2.6.2.** (*Фундаментальная теорема для области тонкого тела в  $\mathbb{R}^3$  при ее новой параметризации*) *Наличие единственного тензора второго ранга, представленного в виде*

$$\underline{\mathbf{E}} = g_{\hat{p}\hat{q}} \mathbf{r}^{\hat{p}} \mathbf{r}^{\hat{q}}, \quad \wedge, \cup \in \{-, \emptyset, +\},$$

*необходимо и достаточно для существования, и при этом единственной, с точностью до движения в  $\mathbb{R}^3$  некоторой регулярной области тонкого тела при ее новой параметризации. При этом число независимых основных компонент ETBP зависит от типа семейства параметризации.*

**Упражнение 4.1** Осуществить все построения четвертой главы, если радиус-вектор  $\hat{\mathbf{r}}(x', x^3)$  произвольной точки тонкого тела задается соотношением

$$\hat{\mathbf{r}}(x', x^3) = \mathbf{r}(x') + [h(x')x^3 + \bar{h}(x')] \mathbf{n}(x'), \quad -1 \leq x^3 \leq 1,$$

где  $h(x') = (1/2)[\overset{(+)}{h}(x') + \overset{(-)}{h}(x')]$ ,  $\bar{h}(x') = (1/2)[\overset{(+)}{h}(x') - \overset{(-)}{h}(x')]$ ,  $\mathbf{r}(x')$  — радиус-вектор произвольной точки базовой поверхности, которая не является срединной поверхностью.

**Указание.** При дифференцировании  $\hat{\mathbf{r}}(x', x^3)$  ввести обозначение  $\mathbf{r}_{\hat{p}} = \partial_p \hat{\mathbf{r}}(x', x^3)$  и индекс с крышечкой сохранить для геометрических объектов в произвольной точке тонкого тела. Например,  $g_{\hat{p}\hat{q}} = \mathbf{r}_{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}_{\hat{q}}$ ,  $g^{\hat{p}\hat{q}} = \mathbf{r}^{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}^{\hat{q}}$ ,  $\mathbf{r}^{\hat{p}} = (1/2)C^{\hat{p}\hat{q}\hat{s}} \mathbf{r}_{\hat{q}} \cdot \mathbf{r}_{\hat{s}}$  и т.д. Такое представление радиус-вектора удобно во многих случаях, особенно тогда, когда при построении тонких тел используются системы классических ортогональных полиномов (Лежандра, Чебышева первого и второго родов).

**Упражнение 4.2** Придумать представление радиус-вектора произвольной точки области стержня с поперечным сечением в виде прямоугольника, когда в качестве базовой рассматривается произвольная кривая внутри области.

**Упражнение 4.3** Придумать представление радиус-вектора произвольной точки области стержня с поперечным сечением в виде параллелограмма, когда в качестве базовых рассматриваются граничные кривые области стержня.

Следует заметить, что при наборе работы были использованы замечательные книги [4, 14, 30].

# Литература

- [1] Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979. 512 с.
- [2] Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978, 296 с.
- [3] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции/Под ред. О.А.Олейник и Б.В.Шабата.– 2-ое изд., перераб. М.: Наука, 1988, 512 с.
- [4] Гуссенс М., Мимттельбах Ф., Самарин А. Путеводитель по пакету L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X и его расширению L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X<sub>2ε</sub>. Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 606 с.
- [5] Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.: Высш. шк., 2001. 575 с.
- [6] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ: Методы и приложения. М.: Эдиториал. УРСС, т. 1, 1998, 336 с.; т. 2, 1998, 280 с.
- [7] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды: Учебник. 3-е изд. М.: Изд-во, 1990, 310 с.
- [8] Коренев Г.В. Тензорное исчисление. М.: Изд-во МФТИ, 1995, 240 с.
- [9] Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957.
- [10] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
- [11] Лохин В.В., Седов Л.И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов// ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3, с. 393–417.
- [12] Лохин В.В. Нелинейные тензорные функции в пространстве Минковского. В кн.: Научные труды Ин-та механики, №31. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974, с. 6–66.
- [13] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980, 512 с.
- [14] Львоевский С.М. Набор и верстка в пакете L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X/ 2-ое изд., испр. и дополн. М.: Космосинформ, 1995. 374 с.
- [15] Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: Физматгиз, 1958.
- [16] Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963, 411 с.

- [17] *Никабадзе М.У.* Параметризация оболочек на основе двух базовых поверхностей. М., 1988. 30 с. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 12.07.88. №5588-В88. 30 с.
- [18] *Никабадзе М.У.* О символах Кристоффеля и втором тензоре поверхности при новой параметризации пространства оболочки // Вестник Моск. ун-та. Сер. Математика. Механика. 2000. №3. С. 41–45.
- [19] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975, 872 с.
- [20] *Погорелов А.В.* Геометрия. М.: Наука, 1983. 288 с.
- [21] *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984, 336 с.
- [22] *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986, 264 с.
- [23] *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности: Учеб. пособие. 2-ое изд. М.: Изд-во МГУ, 1995, 366 с.
- [24] *Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.* Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2006. 272 с.
- [25] *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988, 712 с.
- [26] *Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига, «Зинатне», 1974, 310 с.
- [27] *Седов Л.И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962, 284 с.
- [28] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, т. 1, 1983, 528 с.
- [29] *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. М.: Наука, 1971, 376 с.
- [30] *Сливак М.* Восхитительный TeX: Руководство по комфортному изготовлению научных публикаций в пакете  $AMS\text{-}TeX$  / Пер. с англ. М.: Мир, 1993. 285 с.
- [31] *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984, 416 с.
- [32] *Green A.E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. Oxford, 1954, 442 p.

# Оглавление

<b>1 Построение линейно независимых изотропных, гиротропных, ортотропных и трансверсально-изотропных тензоров</b>	<b>5</b>
1.1 Об изотропных тензорах в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	5
1.2 Об ортотропных тензорах в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ . Представления ортотропных тензоров второго и четвертого ранга . . . . .	7
1.3 О гиротропных в $\mathbb{R}^2$ и трансверсально-изотропных в $\mathbb{R}^3$ тензорах . . . . .	12
1.3.1 О двумерных гиротропных тензорах . . . . .	14
1.3.2 О трансверсально-изотропных тензорах . . . . .	15
<b>2 Новая параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства</b>	<b>27</b>
2.1 Параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства на основе двух базовых поверхностей . . . . .	27
2.1.1 Векторное параметрическое уравнение области тонкого тела . . . . .	29
2.1.2 Двухмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации поверхности . . . . .	30
2.1.3 Трехмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации области . . . . .	31
2.1.4 Мультиплекативные базисы . . . . .	35
2.1.5 Различные семейства символов Кристоффеля . . . . .	36
2.1.6 Деривационные формулы для мультиплекативных базисов . . . . .	37
2.1.7 Представление единичного тензора второго ранга . . . . .	38
2.1.8 Представления изотропных тензоров четвертого ранга . . . . .	39
2.1.9 О ковариантной производной от компонент тензоров . . . . .	42
2.2 Связи между различными семействами параметризаций области тонкого тела	44
2.2.1 Связь между различными семействами мультиплекативных базисов .	44
2.2.2 Связь между различными семействами символов Кристоффеля . . .	45
2.2.3 Связи между компонентами и ковариантными производными от компонент многоточечного тензора . . . . .	45
2.3 О компонентах ETBP . . . . .	46

2.3.1	Об основных компонентах ETBP и число независимых основных компонент ETBP . . . . .	46
2.3.2	Представления компонент ETBP через основные компоненты переноса того же тензора при различных семействах параметризации области тонкого тела . . . . .	49
2.3.2.1	Вектор $\mathbf{h}$ не перпендикулярен к базовым поверхностям . . . . .	49
2.3.2.2	Вектор $\mathbf{h}$ перпендикулярен к основной базовой поверхности	52
2.3.2.3	Вектор $\mathbf{h}$ перпендикулярен к основной базовой поверхности и координатные линии на ней являются линиями кривизны .	52
2.4	Выражение различных семейств символов Кристоффеля через основные компоненты ETBP . . . . .	55
2.4.1	Выражение семейств символов Кристоффеля относительно базисов, связанных с лицевыми поверхностями, через основные компоненты ETBP . . . . .	56
2.4.2	Выражение $S_g$ -семейства символов Кристоффеля через основные компоненты ETBP . . . . .	57
2.5	Представление компонент вторых тензоров поверхностей посредством основных компонент ETBP . . . . .	58
2.5.1	Представление компонент второго тензора поверхности $S$ посредством основных компонент ETBP . . . . .	58
2.5.2	Представление компонент вторых тензоров лицевых поверхностей посредством основных компонент ETBP . . . . .	59
2.5.2.1	Представление средних и гауссовых кривизн поверхностей посредством основных компонент ETBP . . . . .	60
2.5.2.2	Представления компонент переноса и компонент ETBP в виде степенных рядов относительно $x^3$ . . . . .	64
2.5.2.3	О представлении расширенного второго тензора поверхности . . . . .	71
2.5.3	О тензорах Римана-Кристоффеля в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	72
2.5.4	Тождества Ламе . . . . .	77
2.6	О тензорах Римана-Кристоффеля при новой параметризации области тонкого тела в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	78
	<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>89</b>

НИКАБАДЗЕ Михаил Ушангиевич

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

### ЧАСТЬ II

Оригинал-макет подготовлен издательской группой  
механико-математического факультета МГУ

Подписано в печать 10.09.2007 г.  
Формат 60 × 90 1/16. Объем 5,8125 п.л.  
Заказ 35              Тираж 50 экз.

---

Издательство ЦПИ при механико-математическом  
факультете МГУ, 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ.  
Лицензия на издательскую деятельность ИД №04059 от 20.02.2001 г.

---

Отпечатано на типографском оборудовании  
механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова  
и Франко-русского центра им. А.М. Ляпунова

© Никабадзе М.У., 2007 г.